



**28 a 31 de Março de 2021**  
**Uberaba - Minas Gerais - Brasil**



**BREVE APONTAMENTO SOBRE *THE METHOD OF FLUXIONS AND INFINITE SERIES*, DE ISAAC NEWTON**

Jorge Luiz de Almeida Zeferino Junior<sup>1</sup>

Fumikazu Saito<sup>2</sup>

### **RESUMO**

Este trabalho apresenta alguns breves apontamentos preliminares que pertencem a uma pesquisa de mestrado em Educação Matemática que está em andamento cujo objetivo é estudar o cálculo de fluxões de Isaac Newton. A obra de Newton escolhida para este trabalho é intitulada *The Method of Fluxions and Infinite Series; with its Application to the Geometry of Curve-Lines*, que foi publicada em 1736. O presente tratado traz consigo registros de aplicações do Cálculo de Séries Infinitas e do seu Cálculo de Fluxões em problemas referentes a curvaturas e quadraturas, assuntos que estavam presentes em debates no século XVII. Uma análise mais delineada do conteúdo dessa obra e considerando o contexto matemático de sua época, identificamos que o cálculo de fluxões se mostrava presente em um grupo com conotações de físico-matemática. Dessa forma, expomos aqui a organização da obra, cujo entendimento foi importante para termos uma compreensão mais clara dos assuntos e temas abordados por Newton para dar seguimento à nossa pesquisa.

**Palavras-chave:** Método das Fluxões; Cálculo; Quadraturas.

### **INTRODUÇÃO**

As investigações envolvendo curvas e quadraturas receberam grande atenção de estudiosos de matemática no século XVII. Essas investigações foram acompanhadas por um interesse renovado pela determinação de suas tangentes, que passaram a ser vistas não só como resultados da especulação geométrica, mas também física ou técnica.

Um dos estudiosos que se debruçou sobre esse assunto foi Isaac Newton (1642-1727) que elaborou, a partir daí, o cálculo de fluxões. Foi provavelmente

<sup>1</sup> Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). jorgeluz.edu@hotmail.com.

<sup>2</sup> Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). fsaito@pucsp.br.

depois de se dedicar ao estudo das séries infinitas em 1664, época em que também investigava o desenvolvimento do binômio, que Newton teve as primeiras ideias sobre as fluxões e as utilizou para encontrar a tangente e o raio da curvatura de um ponto numa curva por volta de 1665.

A aplicação mais sistemática da ideia de fluxões aparece enunciada, implicitamente, em *Philosophiae naturalis principia mathematica*<sup>3</sup> de 1687, e de forma muito mais explícita em seus ensaios e estudos sobre equações, *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*<sup>4</sup>, escrito em 1669, mas publicado em 1711, *The Method of Fluxions and Infinite Series; with its Application to the Geometry of Curve-Lines*<sup>5</sup>, redigido em latim em 1671, porém traduzido para a língua inglesa e impresso neste idioma em 1736, e em *Tractatus de quadratura curvarum*, elaborado por volta de 1676, mas publicado em 1704 como apêndice do seu tratado de óptica, intitulado *Opticks*.<sup>6</sup>

Neste trabalho apresentamos alguns apontamentos sobre a obra intitulada *The Method of Fluxions and Infinite Series* de 1736 onde Isaac Newton apresenta seu cálculo de fluxões dando especial ênfase na sua organização com o foco nos problemas de curvatura e quadratura.

## A obra e suas partes

Nem todos os escritos de Newton, dedicados à matemática, foram publicados em sua época. Muitos deles circularam em forma manuscrita, ou foram parcialmente resumidos em correspondências, e só foram publicados tardiamente. Dos escritos relacionados ao cálculo de fluxões encontram-se dois que ganham destaque: *De analysi per aequationes infinitas*, e *The Method of Fluxions*.

O primeiro deles foi enviado, em 1699, a Isaac Barrow (1630-1677), que o encaminhou a John Collins (1625-1683), que lhe deu ampla divulgação. Segundo

<sup>3</sup> Vide, especialmente: Seção I e II, Livro I, em Newton (2008, p. 71-99).

<sup>4</sup> Doravante indicada neste texto por *De analysi per aequationes infinitas*.

<sup>5</sup> A versão em latim foi intitulada *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*. Para este trabalho utilizamos a tradução inglesa que, doravante, será indicada por *The Methods of Fluxions*.

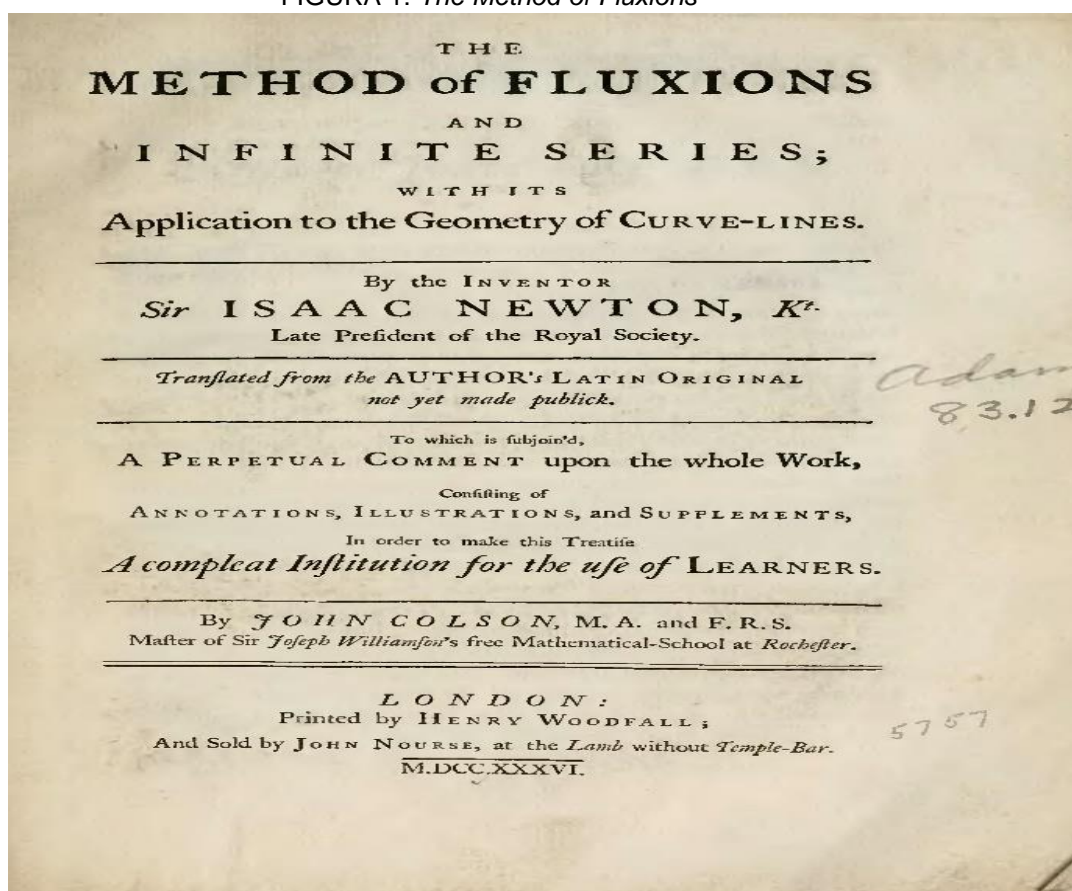
<sup>6</sup> A esse respeito, consulte Guicciardini (2016, p. 389-394), outras considerações a respeito deste recorte temporal, podem ser consultadas em Smith (1923, v. I, p. 398-404); sobre a relação entre as investigações sobre o cálculo de fluxões e a filosofia natural, vide: Westfall (1995, p. 37-84) e Cohen (2007, p. 1986-2021).

Panza (2010), o manuscrito foi composto, provavelmente, com o propósito de assegurar a sua prioridade sobre a invenção de um método geral de séries infinitas.

De acordo com Whiteside (1968), *De analysi per aequationes infinitas* foi impresso tardiamente em 1711 por William Jones (1675-1749) de modo que ele circulou em forma manuscrita entre um seleto grupo de estudiosos de matemática. A esse respeito, Cohen (2007) observa que, naquela época, Newton não teve interesse de imprimi-lo e incorporou as principais partes dele em outro escrito, intitulado *Methodus fluxionum et serierum ininititarum*. Compilado por volta de 1671, esse segundo tratado também não foi impresso até ser traduzido para a língua inglesa por John Colson (1680-1760) e ser publicado em 1736.

Como podemos depreender pelo frontispício de *The Method of Fluxions and Infinite Series* (Figura 1), este tratado foi organizado e publicado por Colson com o objetivo de utilizá-lo para instruir não só jovens estudantes, mas também estudiosos de matemática que se dedicavam ao estudo de curvaturas.

FIGURA 1: *The Method of Fluxions*



Fonte: Colson (1736)

O tratado é composto de duas grandes partes, precedidas por uma dedicatória a Jones e um prefácio. Na primeira parte, Colson publica a tradução inglesa do manuscrito *Methodus fluxionum et serierum ininititarum* e, na segunda, explica cada problema por meio de comentários que são anexados no final da obra com vistas a esclarecer as dificuldades que possam surgir<sup>7</sup>. O quadro a seguir expressa a forma como está composta a obra com mais detalhes.

QUADRO 1 – *The Method of Fluxions* (1736)

|  |         |
|--|---------|
| <b><i>The Method of Fluxions and Infinite Series</i></b>   |         |
| Dedication to William Jones Esq; F.R.S.  | p. iii  |
| PREFACE  | p. iv   |
| <b>CONTENTS</b>  | p. xxiv |
| The Introduction, or the Method of refolding complex Quantities into Infinite Series of Simple Terms.  | p. 1    |
| Prob. 1 From the given Fluents to find the Fluxions.   | p. 21   |
| Prob. 2 From the given Fluxions to find the Fluents.   | p. 25   |
| Prob. 3 To determine the Maxima and Minima of Quantities   | p. 44   |
| Prob. 4 To draw Tangents to Curves.  | p. 46   |
| Prob. 5 To find the Quantity of Curvature in any Curve.  | p. 59   |
| Prob. 6 To find the Quality of Curvature in any Curve.   | p. 75   |
| Prob. 7 To find any number of Quadrable Curves.  | p. 80   |
| Prob. 8 To find Curves whose Areas may be compared to those of the Conic Sections.   | p. 81   |
| Prob. 9 To find the Quadrature of any Curve affing'd.  | p. 86   |
| Prob. 10 To find any number of rectifiable Curves.   | p. 124  |
| Prob. 11 To find Curves whose Lines may be compared with any Curve-lines affign'd.   | p. 129  |
| Prob. 12 To rectify any Curve-lines affign'd.  | p. 134  |
| <b>A PERPETUAL COMMENT upon the foregoing TREATISE.</b>  | p. 141  |
| I. Annotations on the Introduction; or the Resolution of Equations by Infinite Series. (Sect I, Sect II, Sect III, Sect IV, Sect V, Sect VI)   | p. 143  |
| II. Annotations on Prob. 1. or, the Relation of the flowing Quantities being given, to determine the Relation of their Fluxions. (Sect I, Sect II, Sect III)                         | p. 241  |
| III. Annotations on Prob. 2. or, the Relation of the Fluxions being given, to determine the Relation of the Fluents. (Sect I, Sect II, Sect III, Sect IV, Sect V, Sect VI, Sect VII) | p. 277  |

Fonte: Colson (1736)

<sup>7</sup> Apenas a primeira parte de *The Methods of Fluxions* é de autoria de Newton. Desse modo, para evitar confusões, referenciamos o conteúdo expresso da primeira parte por Newton (1736) e a dedicatória a William Jones, o prefácio e a segunda parte por Colson (1736).

No que diz respeito à primeira parte, Newton apresenta uma introdução seguida de doze problemas. A esse respeito, Colson observa no prefácio que podemos convenientemente agrupar esses problemas e dividir o *The Methods of Fluxions* em três partes, de tal modo a termos uma visão mais geral da abordagem matemática dada por Newton:

[...] A primeira será a Introdução, ou o Método de Séries Infinitas. A segunda é o Método dos Fluxos, propriamente chamado. A terceira é a aplicação de ambos os métodos a algumas especulações muito gerais e curiosas, principalmente na geometria das linhas curvas. (COLSON, 1736, p. xx, tradução nossa)

Na primeira parte, Newton apresenta e desenvolve a técnica das séries infinitas.<sup>8</sup> Na segunda, introduz o conceito de fluxão, resolve problemas dos máximos e mínimos de uma dada curva e da tangente a uma curva, e outros relativos à curvatura de uma linha.<sup>9</sup> E, na terceira, trata do cálculo de áreas das regiões planas de uma curva e da medida do comprimento de uma curva.<sup>10</sup>

Colson (1736) observa, em suas anotações ao Problema 2, que Newton considerava que a aritmética e a álgebra eram a mesma ciência, “possuindo uma estrita analogia entre si, tanto em anotações quanto nas operações” (COLSON, 1736, p. 330), de tal modo que a (aritmética) designava o cálculo de uma maneira definida e particular, e a (álgebra), geral e indefinida, assim juntas, compunham uma única ciência do cálculo. Em outros termos, para Newton, segundo Colson (1736), a aritmética e álgebra possuíam forte conexão:

Pois, como na aritmética comum, calculamos pela raiz *dez* e pelas várias potências dessa raiz. Assim, em álgebra ou análise, quando os termos são dispostos em ordem, conforme prescrito, calculamos por qualquer outra *raiz* e suas potências, ou podemos usar qualquer número geral para a *raiz* de nossa escala aritmética, pela qual expressar e calcular quaisquer números requeridos. (COLSON, 1736, p. 330, tradução nossa)

Desse modo, na primeira parte, em que Newton trata de séries infinitas, a aritmética e a álgebra desempenham um papel mútuo, em razão do uso de polinômios, binômios, extração de raiz e divisão infinita. Assim, a primeira parte,

<sup>8</sup> Vide: “Introduction”, Newton (1736, p. 1-21).

<sup>9</sup> Vide: Prob. I a Prob. VI, em Newton (1736, p. 21-80).

<sup>10</sup> Vide: Prob. VII a Prob. XII, em Newton (1736, p. 80-140).

intitulada “The Introduction, or the Method of refolding complex Quantities into Infinite Series of Simple Terms”, trata de curvas, expressas algebricamente, que podem ser reduzidas a séries infinitas. Neste estudo inicial, Newton propõe reduzir uma expressão algébrica por meio de divisão infinita, polinômios, binômios e extração de raiz.

Essa parte é finalizada fazendo a passagem do Método das Séries Infinitas para o Método das Fluxões a partir de uma nova abordagem dada ao cálculo de curvaturas e quadraturas. Denominada de “Transição para o Método de Fluxos”, essa passagem foi expressa por Newton da seguinte maneira:

Agora resta que, para uma ilustração da Arte Analítica, forneça algumas amostras de problemas, especialmente como a natureza das curvas. Mas, primeiro, pode-se observar que todas as dificuldades destes tipos podem ser reduzidas apenas a esses dois problemas que proponho, a respeito do espaço descrito por qualquer movimento local, por mais acelerado ou retardado que seja. (NEWTON, 1736, p. 19, tradução nossa)

Ou seja, Newton propõe mostrar que os estudos de curvaturas e quadraturas, que vinham sendo resolvidos por meio de séries infinitas, ganhariam uma forma mais simples de se resolver. E que os problemas até agora encontrados sobre curvas e áreas pudessem ser reduzidos a dois problemas do movimento local. Em outros termos, Newton faz a transição para o método dos fluxos, apresentando, de forma geral, que o seu princípio fora extraído da mecânica racional, isto é, da “ciência dos movimentos que resultam de quaisquer forças, e das forças exigidas para produzir quaisquer movimentos, rigorosamente propostas e demonstradas” (NEWTON, 2008, p. 14).

Assim, após tratar do método das séries infinitas, Newton propõe dois problemas (Prob. I e Prob. II) que introduzem o conceito de fluxões abordado na segunda parte. O primeiro problema é proposto para encontrar a fluxão de uma dada quantidade, ou, como ele enunciou: “Sendo dada a relação dos fluentes, encontrar as relações de suas fluxões” (NEWTON, 1736, p. 21, tradução nossa). E, o segundo, inverso deste, é o método das fluxões, em que propõe determinar o fluente a partir da fluxão ou de algumas relações que a envolvem. Ou seja, “Sendo proposta uma equação que exhibe a relação das fluxões de quantidade, encontrar

as relações dessas quantidades ou fluentes” (NEWTON, 1736, p. 25, tradução nossa).

Conforme observa Smith (1923), o primeiro problema se refere à diferenciação e, o segundo, à integração (o qual Newton denominou de “método da quadratura”), ou à solução de uma equação diferencial (chamada de “método inverso das tangentes” por Newton). Com efeito, no primeiro problema, Newton estabelece que os fluentes são quantidades que sofrem variações de acordo com seu movimento ou fluxo. Assim, as fluxões são as velocidades que são adquiridas por um corpo através de seu movimento.<sup>11</sup> A relação entre fluentes e fluxões possibilita, dessa maneira, expressar a natureza de uma curvatura:

[...] Uma linha certa (reta), ou uma linha curva, é descrita pelo movimento de um ponto, uma superfície pelo movimento de uma linha, um sólido pelo movimento de uma superfície, um ângulo pela rotação de um raio; todos os movimentos que podemos conceber que sejam executados de acordo com qualquer lei declarada, conforme a ocasião exigir. (COLSON, 1736, p. 235, tradução nossa)

Em outras palavras, geometricamente, a trajetória é representada por uma linha e o corpo, por um ponto.<sup>12</sup> Entretanto, o movimento de um corpo, além de descrever uma linha, possui velocidade. Desse modo, a essas velocidades, que são “quantidades matemáticas”<sup>13</sup> adquiridas através dos movimentos dos corpos, Newton as denominou Fluxões.

No segundo problema, Newton (1736, p. 18) observa que “como este problema é o inverso do anterior, deve ser resolvido procedendo de forma contrária”. Assim, ele trata do processo inverso ao primeiro, utilizando as relações das fluxões para encontrar os fluentes. Estabelece que, ao se obter a relação que expressa a natureza da curvatura, pode-se obter também a área abaixo dessa curva. A esse respeito, Boyer (1992) ressalta que:

Os fluentes de Newton, análogos da moderna “integral indefinida”, eram o que hoje chamaríamos de antiderivadas em relação ao tempo. Inicialmente Newton usou um pequeno quadrado como seu

<sup>11</sup> A esse respeito, consulte também: M. E. Baron, H. J. M. Bos (1985, p. 28).

<sup>12</sup> A esse respeito, vide também: Roque (2012, p. 337).

<sup>13</sup> Newton considera a velocidade como (quantidades matemáticas), isso porque, alguns estudiosos da época consideravam a velocidade como qualidade relativa ao espaço tempo. A esse respeito vide: Roque (2012, p. 287-288).

símbolo de integração (presumivelmente porque percebia que a integral determinava uma área), (BOYER, 1992, p. 22).

Isto é, o segundo problema propõe encontrar a área abaixo de uma curva. Esse método utilizado para encontrar áreas abaixo de curvas é conhecido por método da quadratura de curvas.<sup>14</sup>

Uma vez posto e explicitado o método, como podemos observar no quadro 1, os dez problemas subsequentes tratam de sua aplicação ao estudo de curvaturas, com vistas a determinar os máximos e mínimos, a traçar a tangente e retificar curvas e quadraturas de curvas. Enfim, as sete seções, distribuídas em três partes, apresentam anotações em que Colson tece comentários à introdução e aos dois primeiros problemas.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Podemos dizer que *The Methods of Fluxions* encontra-se organizado de tal forma a favorecer o ensino da aplicação do método das fluxões para resolver problemas. A forma em que se encontra sintetizado o método reflete a abordagem físico-matemática de Newton<sup>15</sup>, em que fez uso de seu cálculo de fluxões para estudar fenômenos naturais, que mais tarde serviram também como base para elaboração de seu tratado de óptica, intitulado *Opticks*, bem como dos *Philosophiae naturalis principia mathematica* de 1687.

Com base nessa primeira leitura, estamos, no momento, investigando sobre a parte intitulada “Transição para o Método de Fluxos” em que Newton apresenta uma nova notação matemática a que ele denominou “momento”. Essa transição parece ser reflexo de um contexto matemático mais amplo, estreitamente ligado às matemáticas-mistas e à físico-matemática.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARON, E. M.; BOS, H. J. M. **Curso de história da matemática**: origens e desenvolvimento do cálculo (Unidade 3. Newton e Leibniz). Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

<sup>14</sup> A esse respeito vide: M. E. Baron, H. J. M. Bos (1985, p. 34).

<sup>15</sup> A esse respeito vide: (DEAR, 2001, p. 162).



BOYER, C. B. **Cálculo** - tópicos de história da matemática para uso em sala de aula. Tradução de Higino H. Domingues. São Paulo: Atual Editora Ltda, 1992, v. 6.

COHEN, I. B. Newton, Isaac. In: GILLIESPIE, C. C. (ed.). **Dicionário de biografias científicas**. Trad. De C. A. P. et al. Rio de Janeiro: Contraponto, 2007. v. III, p. 1983-2044.

DEAR, P. **Revolutionizing the Sciences: European Knowledge and Its Ambitions, 1500-1700**. 3ª ed, 2001.

GUICCIARDINI, N. A brief introduction to the mathematical work of Isaac Newton. In: ILLIFIE, R.; SMITH, G. E. (eds.). **The Cambridge Companion to Newton**. 2ª. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2016. p. 382-420.

NEWTON, I. **Analysis per quantitatum, series, fluxiones, ac differentias cum enumeratio linearum tertii ordinis**. Tradução de W. JONES. Londres: Cambridge, 1711. Disponível em: <[www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/2553713](http://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/2553713)>. Acesso em: 07 mar. 2021.

NEWTON, I. **Principia: Princípios Matemáticos de Filosofia Natural**. São Paulo: Edusp, 2008, 2 vols.

NEWTON, I. **The Method of Fluxions and Infinite Series: Wirth its application to the geometry of curve-lines**. Tradução de JOHN COLSON. Londres: Cambridge, 1736. Disponível em: <<https://archive.org/details/methodoffluxions00newt/page/n4/mode/2up>>. Acesso em: 7 mar. 2021.

PANZA, M. **Das velocidades às fluxões**. Scientiae Studia, v. 8, n. 4, 2010, p. 509-546.

ROQUE, T. **História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SMITH, D. E. **History of Mathematics**. Boston/New York/Chicago/London: Ginn and Company, 1923, 2 vol.

WESTFALL, R. S. **A vida de Isaac Newton**. Trad. V. Ribeiro. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995.

WHITESIDE, D. T. (Ed.) **The Mathematical Papers of Isaac Newton**. Cambridge: Cambridge University Press, 1667-1670. 2 v.