

Alguns aspectos da noção de espaço geométrico no século XVI a partir de um estudo preliminar de duas obras de Francesco Patrizi da Cherso¹

Fumikazu Saito

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

fsaito@pucsp.br

RESUMO

Francesco Patrizi da Cherso (1529-1597) é muito conhecido pelos historiadores da filosofia e da ciência, mas pouca atenção lhe foi dada pelos historiadores da matemática. Neste trabalho apresentamos um estudo preliminar de sua concepção de espaço (físico e matemático), tendo por base os tratados *Della nuova geometria* (1587) e *De spacio physico et mathematico* (1591). As considerações de Patrizi sobre o espaço convida-nos a revisitar uma parte do processo que conduziu à moderna concepção de espaço geométrico. Ao contrário do que comumente se pensa, a noção de espaço em geometria nem sempre foi a mesma desde a época em que viveu Euclides até o século XVII. A consideração de um espaço próprio à geometria (e o subsequente estudo de suas propriedades intrínsecas) foi resultado de um conjunto de reflexões e discussões envolvendo a matemática e seu objeto de investigação. Mas, para compreendermos apropriadamente o significado desse processo, não devemos perder de vista um conjunto de ações e práticas ligadas à geometria, que se expressava de forma multifacetada, estabelecendo relações com diferentes segmentos de conhecimento nos séculos XVI e XVII. As considerações sobre os espaços físico e matemático feitas por Patrizi em *De spacio physico et mathematico* tiveram significativas implicações para a geometria. Em *Della nuova geometria*, ele procurou redefinir e explicitar os fundamentos desse campo de investigação, buscando assentá-lo em princípios que eram filosoficamente demonstrados e não simplesmente postulados ou admitidos implicitamente, tal como em *Elementos* de Euclides. Nessa obra, Patrizi propôs inverter a exposição dos conceitos geométricos encontrado em *Elementos*, começando por definir o espaço antes do ponto, da linha e da superfície. Dentre as várias implicações desse procedimento proposto em *Della nuova geometria*, apontamos neste trabalho apenas para uma delas relacionada à divisibilidade da linha. Concluímos este trabalho observando que Patrizi considerou o espaço não só como princípio da geometria, mas também como seu objeto de investigação. A "nova geometria" de Patrizi, dessa maneira, não era somente uma ciência das figuras que se encontravam no espaço, mas também uma ciência do próprio espaço.

Palavras-chaves: história da matemática, geometria, século XVI.

¹ Este trabalho é parte integrante do Projeto Universal CNPq - proc. no. 484784/2013-7.

Introdução

A geometria, bem como outras "matemáticas", passaram por numerosas mudanças e reviravoltas conceituais ao longo de sua história.² Parte desse processo deveu-se a diferentes e variados fatores relacionados não só ao contexto histórico em que a geometria estava inserida, mas também a outros aspectos conceituais, igualmente ligados a esse mesmo contexto, em torno do objeto de investigação do geômetra. Assim, épocas e grupos diferentes reportaram-se ao estudo da geometria por diferentes razões, definindo-a e usufruindo-se dela conforme exigiam as demandas locais.

Neste trabalho, abordamos uma dessas mudanças conceituais, tendo por foco a noção de espaço geométrico de Francesco Patrizi da Cherso (1529-1597) em seu tratado *Della nuova geometria* publicado em 1587. Ao contrário do que comumente se pensa, a noção de espaço em geometria nem sempre foi a mesma desde a época em que viveu Euclides até o século XVII. A consideração de um espaço próprio à geometria (e o subsequente estudo de suas propriedades intrínsecas) foi resultado de um conjunto de reflexões e discussões envolvendo a matemática e seu objeto de investigação (VITTORI, 2009). Nesse sentido, o tratado de Patrizi convida-nos a revisitar uma parte do processo que conduziu à moderna concepção de espaço geométrico na medida em que procurou redefinir e explicitar os fundamentos da geometria em finais do século XVI.

Da "medida da terra" (*mensuratio terrae*) para "ciência do espaço" (*scientia spacii*)

Francesco Patrizi da Cherso nasceu em Cherso, próximo a Trieste, em 1529. Foi soldado, estudante de medicina, comerciante de algodão e livreiro antes de falir e buscar patrocínio junto ao duque Alfonso II (1533-1559) e da família D'Este. Além disso, foi professor de filosofia platônica em Ferrara no período de 1576 e 1593, mudando-se para Roma subsequentemente onde faleceu em 1597 (ASHWORTH, 1998).

Patrizi é muito conhecido pelos historiadores da filosofia e da ciência, mas pouca atenção lhe foi dado pelos historiadores da matemática. Traduziu vários escritos gregos para o latim, incluindo aqueles atribuídos a Aristóteles (384 AEC-322 AEC), a Proclus (412-485), a Philoponus (c. 490-c. 570). Publicou também uma nova tradução do *Corpus hermeticum* e dos oráculos caldeus e

² Antes do século XVI inexistia ainda um corpo unificado e autônomo de conhecimento que possamos identificar como Matemática. Assim, por "matemáticas" designamos as diferentes "práticas matemáticas" encontradas em períodos anteriores aos século XIX; vide: Cuomo (2001); Goulding (2010); Roux (2010); Bromberg & Saito (2010); Beltran, Saito & Trindade (2014).

foi bem conhecido em sua época por sua postura antiaristotélica. Como muitos estudiosos de sua época, ele se aproximou do conhecimento filosófico e natural com uma perspectiva humanista. Assim, deu grandes contribuições a teoria poética, retórica e historiografia, bem como a história da arte militar e hidráulica. Mas, dentre suas obras, as duas mais importantes e influentes foram *Discussiones peripateticae* e *Nova de universis philosophia*. A primeira foi publicada em 1581 com o objetivo de criticar a escolástica, baseada na filosofia aristotélica e, a segunda, publicada em 1591, de erigir uma filosofia baseada numa forma de pensamento de vertente "platônica" que pudesse servir de base à fé cristã (ASHWORTH, 1998; DEITZ, 1999).

Inspirado pela leitura de *Theologia platonica* de Marsilio Ficino (1433-1499), Patrizi tornou-se um zeloso seguidor das ideias platônicas, alimentando com os anos uma total aversão a toda forma de conhecimento que fosse de índole aristotélica. Para ele, a filosofia aristotélica deveria ser substituída por um espécie de síntese de pensamento platônico, neoplatônico e hermético, visto que a tradição peripatética tinha se degenerado após Alexandre de Afrodísias (*fl.* c. 198–209), tornando-se escrava de uma única forma de pensar, transformado-se num dogma irrefutável (COPENHAVER; SCHMITT, 2002, p. 189).

Podemos dizer que Patrizi buscou renovar e defender o cristianismo por meio de um regresso às doutrinas pré-aristotélicas. Aplicando os conhecimentos adquiridos em fontes gregas, que, segundo ele, foram ignoradas pelos aristotélicos, procurou reafirmar a proposta histórica de Ficino, que priorizava a reconstrução de todo conhecimento fundamentando-o na *prisca sapientia*, ou seja, no conhecimento original anterior a Aristóteles e seus seguidores.³ Assim, ao dedicar sua obra *Nova de universis philosophia* ao Papa Gregório IV, Patrizi apontara para quatro filósofos pios, Zoroastro, Hermes, Platão e ele próprio, sugerindo-lhe que substituísse o sistema filosófico de pensamento aristotélico em todas as escolas e universidades católicas, especialmente naquelas administradas pelos jesuítas (COPENHAVER; SCHMITT, 2002, p. 190).

Nova de universis philosophia foi primeiramente publicado em Ferrara em 1591 e, posteriormente, em Veneza, em 1593. Embora essa obra seu principal tratado de filosofia, nunca foi adotado pelas universidades. Além disso, Além disso, segundo Deitz (1999), teve um triste destino, visto que foi incluído no *Index* de livros proibidos cinco anos após sua publicação, em que permaneceu por mais de três séculos.

³ A respeito da influência que a tradição hermética naquela época, vide: Alfonso-Goldfarb (1994), Yates (1995), Rattansi (2004), Sladek (2005), Saito (2010, p. 38-40). Consulte também: Copenhaver (1992) e Ramelli (2005).

A obra encontra-se dividida em quatro seções: 1) *Panaurgia*, ou a doutrina da luz; 2) *Panarchia*, ou a doutrina do primeiro princípio de todas as coisas, 3) *Pampsychia*, ou a doutrina da alma; e 4) *Pancosmia*, ou doutrina do mundo. É nessa última seção que encontramos as considerações de Patrizi no que diz respeito à geometria e aos seus fundamentos.

A organização das matérias nessa obra já traz indícios da influência neoplatônica. A hierarquia dos nove seres, incluindo a natureza e a matemática, era para Patrizi parte de um processo de emancipação da luz. Assim, em *Panaurgia*, Deus (*Un-omnia*) é apresentado como a luz primordial (*prima lux*) que produzira a luz (*lumen*), primeiro em seu Filho, depois em todas as criaturas incorpóreas, engendrando, em seguida, todas as criaturas corpóreas por meio da sua difusão no espaço. Deus é, assim, apresentado em *Panarchia* como o primeiro princípio, o Uno, de quem derivava os primeiros princípios de todas as coisas. Os quatro princípios mais alto eram a unidade, a essência, a vida e a inteligência. Os quatro mais baixos, a natureza, a qualidade, a forma e o corpo. O princípio intermediário era a alma que estava a meio caminho entre o espiritual e o material que é discutido em *Pampsychia*. Nessa seção, Patrizi discorre sobre todas as formas de alma, desde aquelas encontradas nas plantas até a alma do mundo (*anima mundi*) que move todo o cosmos. Enfim, em *Pancosmia*, é tratada sobre a organização do mundo, relativamente às matemáticas e à filosofia natural.

A hierarquia dos seres e a dos saberes estavam, assim, estreitamente relacionados. Para Patrizi o mundo natural era composto de quatro elementos: o espaço (*spacium*), a luz (*lumen*), o calor (*calor*) e o fluido (*fluor*). Por exceder os objetivos deste trabalho, não discorreremos sobre os três últimos elementos, atendo-nos apenas ao primeiro, isto é, ao espaço (*spacium*). Entretanto, é importante termos em consideração que esses quatro elementos fazem parte de um sistema em que o universo encontra-se hierarquizado em nove graus (*gradus*) de realidade, ou seja, de nove seres que emanam de Deus (*Un-omnia*). Assim, do incorpóreo ao corpóreo, em que o mais alto grau de ser é a causa do mais baixo, a existência e a permanência do mundo natural são garantidos por um reino celestial (DEITZ, 1999; EDELHEIT, 2009).

Podemos dizer que nada em *Pancosmia* faz sentido sem considerar o todo (uno) do qual não só as criaturas, mas também seus propósitos e o conhecimento a seu respeito estavam relacionados. Nessa perspectiva, dos quatro elementos, o espaço era o mais importante, visto que ele teria sido a primeira coisa (*res*) criada por Deus *extra se*. Como o espaço físico era primeiro na ordem das essências (*ordo essendi*) e do conhecimento (*ordo cognoscendi*), a física precederia a matemática na ordem de suas considerações. Assim, o espaço geométrico seria posterior ao

espaço físico na ordem dos seres e do conhecimento. Isso porque, para Patrizi, o espaço geométrico não era mera abstração das formas dos corpos, tal como afirmava a filosofia natural de índole aristotélica, pois o espaço físico, na sua compreensão, era real e existia independentemente dos corpos materiais (PATRIZI, 1943, p. 227; 1996, p. 39).

Essa teoria do espaço, elaborada em *Panscomia*, foi retomada por Patrizi em outros dois tratados, um intitulado *Della nuova geometria* (1587) e outro, *De spacio physico et mathematico*⁴ (1591). As considerações de Patrizi sobre o espaço físico tiveram implicações na geometria e no modo de investigar do geômetra, influenciando uma geração de estudiosos a partir do século XVII, particularmente William Gilbert (1544-1603), Francis Bacon (1561-1626), Johannes Kepler (1571-1630), Robert Fludd (1574-1637), Pierre Gassendi (1592-1655), Henry More (1614-1687), entre muitos outros⁵. Mas para que possamos compreender o impacto dessas considerações, é necessário contextualizarmos adequadamente a geometria entre meados do século XVI e finais do XVII, pois ela tinha características muito diferentes das quais hoje estamos acostumados⁶.

Naquela época, a geometria designava, juntamente com a agrimensura⁷, um conjunto de conhecimentos voltados essencialmente para aspectos mais práticos em diferentes setores da sociedade. Assim, embora *Elementos* de Euclides já estivesse disponível aos estudiosos de matemáticas, a geometria especulativa (teórica) estava ainda associada à tradição da *practica geometriae* e, não raras vezes, era definida como ciência matemática da grandeza (*magnitudo*), das formas, das figuras ou da medida⁸.

Isso é bastante compreensível se consideramos que, a partir da Idade Média, a imagem clássica da geometria grega tinha passado por profundas mudanças, rompendo as barreiras entre metafísica, geometria e agrimensura. Isso decorreu, em parte, da nova configuração social, política e religiosa do ocidente latino, que conduziu a uma reorganização do conhecimento em que a referência etimológica passou a ser utilizada para classificar, expressar e captar a essência das diferentes "disciplinas" (*disciplinae*). Nesse contexto, o termo grego *geometria* passou então a

⁴ Neste estudo foram consultados a tradução de Benjamin Brickman em Patrizi (1943) e de Hélène Védrine em Patrizi (1996).

⁵ Vide a esse respeito em: Henry (1979)

⁶ Vide: Saito (2014b).

⁷ Convém observar que a arte de medir é bem antiga. Entretanto, as origens das técnicas de medição do século XVI, remonta basicamente às práticas medievais que deram continuidade à tradição romana dos agrimensores (*agrimensores*), a esse respeito, vide: Lewis (2001), Vitruvius (1999) e Thulin (1913).

⁸ Vide, por exemplo, as considerações feitas por John Dee (1527-160[8]) e Egnatio Danti (1536-1586) em: Dee (1975) e Danti (1577).

designar *mensuratio terrae* (a medição da terra), estabelecendo estreita relação com a agrimensura.

Uma das razões que conduziram os estudiosos de matemáticas a aproximar a geometria da agrimensura está relacionada ao parco material relativo à geometria de Euclides, que estava à disposição dos estudiosos latinos após a queda do Império Romano por volta do século V.⁹ Naquela época, grande parte do conhecimento grego ficara confinada no oriente e disponível aos árabes que o estudaram e o comentaram, desenvolvendo novas matemáticas. Assim, com vistas a reorganizar os conhecimentos relativos à geometria, de modo a dar-lhes alguma coerência, os medievais procuraram aproximá-la da *gromatica*, isto é, da arte de medir terras com a *groma*, instrumento de medida romano que era utilizado para mapear e dividir as terras (ZAITSEV, 1999, p. 531-553). A partir de então, as relações entre geometria e agrimensura estreitaram-se cada vez mais, dando uma nova configuração ao campo de conhecimento geométrico. Assim, em meados da Idade Média, por volta do século XI, a cultura monástica buscou resgatar e ampliar as técnicas de medidas do mundo greco-romano, incorporando-as ao que ficou conhecido por *practica geometriae* (literalmente: "prática da geometria", mas comumente designado pelos historiadores como "geometria prática").

A *practica geometriae* tinha um apelo mais empírico, entretanto, ao contrário da *gromatica*, ela deixou de ser considerada mera aplicação de conhecimento geométrico a partir do século XI, tornando-se um ramo da própria geometria que incorporava aspectos mais teóricos. Hugo de São Vitor (1096-1141), em *Didascalicon*, por exemplo, a incluía entre as sete artes liberais como parte do *quadrivium*, observando tratar-se da ciência das grandezas imóveis (HUGH OF SAINT VICTOR, 1961, p. 67). Entretanto, nos séculos seguintes, com a retomada e a tradução dos tratados de Euclides e de Arquimedes, a partir do árabe, a geometria passou por novas mudanças. No século XII, a edição e a tradução de *Elementos* de Euclides por Adelard de Bath (1080-1152) e, posteriormente, por Campanus da Novara (1220-1296) passaram a roubar o cenário intelectual medieval, conduzindo os estudiosos de matemáticas a reorganizarem o conhecimento, alargando o abismo entre a "geometria demonstrativa" de *Elementos* e a geometria de caráter mais empírico da *practica geometriae*.

O estudo sistemático das obras de Euclides, notoriamente os *Elementos*, entretanto, não ofuscou o ensino da geometria prática. Além das técnicas de medida apresentadas em *Practica*

⁹ Vide estudo de Stevens (2004).

geometriae de Hugo de São Vitor, outras encontradas no tratado intitulado *Geometria Geberti*, atribuído a Gerbert de Aurillac (946-1003) (posteriormente, Papa Silvestre II) continuaram a ser disseminadas (HOMANN, 1991). Mas, além dessas duas expressões de geometria, uma terceira transmitida por tradição oral começou a circular em forma manuscrita em alguns grupos a partir do século XIII. Tratavam-se de "cadernos de desenho", em que arquitetos e "mestres de obras" (carpinteiros e pedreiros) esboçavam genuínas "construções geométricas", tais como os desenhos de Villard de Honnecourt (SHELBY, 1972).

Mas o ambiente intelectual mudou radicalmente com o retorno da ciência grega a partir de finais do século XIV. E à medida em que se avançou em direção ao século XVI, a geometria passou por profundas modificações por causa do crescente interesse pela especulação matemática. Assim, em meados do século XVI, a *practica geometriae* e a agrimensura tornaram-se praticamente indistintas, passando também a incorporar alguns aspectos daquela "geometria construtiva" encontrada nos cadernos de desenho. Mas, diferentemente da *practica geometriae* medieval, ela passou a incorporar "demonstrações geométricas", baseadas nos teoremas encontrados em *Elementos* de Euclides, para validar os procedimentos utilizados na agrimensura.

Podemos dizer que foi nesse contexto, em que diferentes expressões de geometrias conviveram atendendo a diferentes demandas de ordem prática, que a própria geometria passou a reconsiderar não só seu objeto de investigação, mas também a se redefinir e se fundamentar como ciência do espaço. Entretanto, a passagem de uma expressão de conhecimento ligada à *mensuratio terrae* (medição da terra) para outra, de *scientia spacia* (ciência do espaço), não buscou atender uma necessidade essencialmente matemática. Estudos recentes em história da ciência e da matemática têm revelado que esse movimento esteve relacionado a questões de natureza teológica e cosmológica em que a própria noção de espaço físico aceita até então estava em jogo, tal como podemos constatar nos estudos de Patrizi.

A concepção de espaço físico em *De spacio physico et mathematico*

Em *De spacio physico et mathematico*, Patrizi buscou rever a noção dos espaços físico e geométrico legada pela tradição. Esse interesse pelo espaço físico, entretanto, estava relacionado à outra questão, muito recorrente a partir de meados do século XVI, ligada à possibilidade da

existência de um espaço vazio tridimensional e infinito na natureza, que se ocuparam os filósofos naturais e teólogos¹⁰.

Naquela época, o espaço não era compreendido como um lugar ocupado pelos corpos. Pelo contrário, os lugares que ocupavam os corpos é que definiam o espaço físico. Desse modo, para a maioria dos estudiosos da natureza, corpo e espaço eram concebidos como coisas idênticas de tal modo que o espaço ocupado pelos corpos não era em nada diferente deles próprios¹¹. Assim, definido como "*o limite imóvel que envolve um corpo*"¹², o espaço (*spacium*) era entendido como o *locus* (lugar) dos corpos materiais no mundo. O que significa que não poderia haver espaço sem corpo material, uma vez que tudo na natureza era composto de forma e matéria. O espaço (*spacium*) e o lugar (*locus*), dessa maneira, diferiam apenas nominalmente na medida em que um corpo estaria localizado em determinado lugar (ou espaço), entre outros corpos, que tinham a mesma grandeza e a figura desse corpo.

O mesmo podia ser dito a respeito do espaço geométrico. Na esteira da filosofia natural aristotélica, os estudiosos no século XVI admitiam que o espaço geométrico não era senão mera abstração do espaço físico. Assim, do mesmo modo que o espaço físico (concreto), o espaço geométrico (abstrato) não se distinguia das figuras geométricas que lhe davam sua própria configuração. Dessa maneira, ao considerarem os *Elementos* de Euclides, os estudiosos observavam que não havia nada nele que sugerisse que a geometria euclidiana faria referência a um espaço tridimensional, infinito e homogêneo, onde as figuras geométricas estariam alocadas. Isso porque, como bem observa Grant (1981, p. 16), do ponto de vista da geometria pura, a existência de um espaço (*spacium*) independente seria supérflua, pois toda figura geométrica tinha seu próprio espaço na medida em que eram elas que definiam tal espaço. Além disso, se tal espaço (independente das figuras geométricas) existisse, o espaço da figura geométrica e o espaço independente tridimensional seriam indistinguíveis, o que significava que uma infinidade de espaços poderiam ocupar o mesmo lugar, o que era considerado um absurdo naquela época. Nessa perspectiva, Descartes (1997, p. 59-65), por exemplo, observava que o espaço físico tinha seu correspondente geométrico, visto que o que constituía a natureza dos corpos era a

¹⁰ Vide, por exemplo, a controvérsia relativa ao vazio entre Pascal, Noël e Descartes em Saito (2006a, 2006b, 2014). Nas cartas trocadas entre Noël e Pascal, encontramos claros indícios de que ele e o jesuíta não estavam de acordo acerca da definição de espaço vazio. Vide: Pascal (1904, p. 93-104).

¹¹ Vide, por exemplo, Descartes (1997, p. 64); Noël (1904, p. 88).

¹² Vide: *Física*, IV, 4, 212a20 em Aristóteles (1952).

extensão. Assim, o corpo consistia da mesma extensão em comprimento, largura e altura que constituía o espaço. Conseqüentemente, como dois corpos não podiam ocupar o mesmo lugar ao mesmo tempo, duas extensões também não podiam interpenetrar-se.

Essa concepção mais ortodoxa, entretanto, conflitava com outra em que o espaço (*spacium*) era considerado um receptáculo (ou recipiente) para os corpos materiais. Esquecida durante muito tempo, essa concepção de espaço, foi resgatada e defendida a partir do século XVI por alguns estudiosos, como Giordano Bruno (1548-1600) e Bernardino Telésio (1509-1588). Segundo essa concepção, não era um absurdo a ideia de um espaço vazio e infinito no qual os todos corpos materiais estariam nele dispostos¹³. Assim, da mesma forma que Bruno e Telésio, outros três estudiosos defenderam a possibilidade da existência de um espaço vazio tridimensional independente dos corpos materiais, embora nenhum deles tenha mencionado categoricamente que este espaço correspondia ou era análogo ao geométrico, a saber, Blaise Pascal (1623-1662), Patrizi e Isaac Newton (1643-1727).¹⁴ Mas, dentre esses três estudiosos, Patrizi foi mais explícito a esse respeito, pois ao expor a independência ontológica do espaço (*spacium*) em *De spacio physico et mathematico*, deu ao termo "lugar" (*locus*) um novo significado. Para Patrizi, *locus* não se confundia com *spacium*, visto que, embora tivesse os mesmos três "elementos" do espaço, isto é, comprimento, largura e profundidade, não era um corpo:

Portanto, o lugar (*locus*), não sendo corpo, será necessariamente um espaço (*spacium*) provido de três dimensões - comprimento, largura e profundidade - com as quais recebe em si e ocupa o comprimento, a largura e a profundidade do corpo localizado (*locatum*). E tal espaço é o verdadeiro lugar (*locus*) e é diferente do [espaço] localizado (*locatum*), imóvel em si mesmo, e igual a todos os lados do corpo localizado (*locatum*). Portanto, o lugar (*locus*) tem seu próprio espaço, diferente do espaço que pertence ao corpo (PATRIZI, 1943 p. 231; PATRIZI, 1996, p. 44, tradução nossa).

Em outros termos, o lugar (*locus*) é definido por Patrizi como espaço tridimensional que precede o corpo na ordem da natureza. Nessa perspectiva, no espaço físico de Patrizi, como bem observa Edelheit (2009), a qualidade era associada ao corpo, o corpo estava

¹³ Vide Livro I em Bruno (1998) e Telesio (2009).

¹⁴ Newton, por sua vez, embora fosse na mesma direção de Patrizi, nada publicou a respeito. Suas ideias principais em relação aos entes geométricos foram registrados num manuscrito intitulado *De gravitatione* que, entretanto, não foi publicado, vide a esse respeito em Grant (1981, p. 233).

alojado em um lugar, e um lugar (*locus*) era, na realidade, um espaço (*spacium*) que estava preenchido com o corpo. Para Patrizi o espaço não estava privado dos corpos, mas, ao contrário, ele e os corpos continham-se e envolviam-se de modo que "*não era nada além do que capacidade [de contê-los]*" (PATRIZI, 1943, p. 240; PATRIZI, 1996, p. 54, tradução nossa). Ou seja, o espaço compartilhava com os corpos seus pontos, suas linhas, suas superfícies e suas profundidades porque ele era um "receptáculo" que os sustentava sem confundir-se com eles.

Mas se o espaço (*spacium*) era simples capacidade de conter um corpo, então ele era alguma coisa (*res*). Isso significava que deveria ser substância ou acidente:

Se ele é substância, ele é corpo ou alguma coisa incorpórea. Se ele é acidente, ele é quantidade, qualidade ou alguma outra coisa parecida. Mas de minha parte afirmo que o espaço é em si mesmo, pois ele precede o mundo e está fora dele, ele não é uma das coisas do mundo, exceto por aquela parte dele que contém o mundo, ou que o mundo ocupa com seu corpo (PATRIZI, 1943, p. 241; PATRIZI, 1996, p. 54-55, tradução nossa).

Patrizi concluiu que o espaço (*spacium*) era uma coisa diferente do mundo, visto que o mundo era corpo e o espaço (*spacium*) era algo independente do corpo. Assim, ele afirmava que o espaço era "*hypostasis, diastema, diastasis, ecstasis, extensio, intervallum, capedo, e intreapedo*" (PATRIZI, 1943, p. 241; PATRIZI, 1996, p. 55, tradução nossa). Contudo, observava que não podia ser um acidente, isto é, quantidade, visto que precedia todas as outras coisas lógica e ontologicamente na medida que fora a primeira coisa criada por Deus:

O espaço (*spacium*), portanto, é extensão substancial (*extensio hypostatica*), que subsiste em si mesma e não depende de nada. Não é quantidade. E se é quantidade, não é aquela das categorias^[15], mas anterior a elas, como se fosse sua fonte e origem. Nem pode ser chamada acidente, pois ele não é atribuído a nenhuma substância (PATRIZI, 1943, p. 241; PATRIZI, 1996, p. 55, tradução nossa).

Esse espaço era, portanto, substância, mas de um tipo muito peculiar:

(...) o espaço é mais do que todas substâncias são substâncias, mas não a

¹⁵ Patrizi se refere às categorias aristotélicas, vide Aristóteles, *Categorias*, IV, 1b25-2a410; especificamente sobre a categoria "quantidade", vide: VI, 4b20-6a26-35, em Aristóteles (1952).

substância da categoria, pois não é uma substância individual, visto que não é composta de forma e matéria. Nem é gênero, pois não é predicado, nem espécies, nem de coisas particulares^[16]. É um tipo diferente de substância daquela da categoria (PATRIZI, 1943, p. 241; PATRIZI, 1996, p. 55, tradução nossa).

Assim, Patrizi o definiu como *corpus incorporeum* ou *noncorpus corporeum*, isto é, como um "corpo incorpóreo" ou um "não corpo corpóreo". Ele era corpóreo porque se estendia e era tridimensional e, incorpóreo, porque não oferecia resistência, nem era denso, e continha todas as coisas corpóreas. Desse modo, o espaço era uma extensão substancial que subsistia nele mesmo, ou seja, era homogêneo, imutável e imóvel tanto no seu todo como em suas partes:

Não é um corpo porque não oferece resistência, nem é objeto ou sujeito da visão, do tato ou de qualquer outro sentido. Por outro lado, não é incorpóreo por ser tridimensional. Ele tem comprimento, largura e profundidade - não apenas uma, duas ou mais outras dimensões, mas todas elas. Portanto, é um "corpo incorpóreo" (*corpus incorporeum*) e um "não corpo corpóreo" (*noncorpus corporeum*). E, em cada aspecto, é *per se substans, per se existens, in se existens*, tanto que se mantém sempre fixo *per se* e em si mesmo, não se movendo, nem mudando sua essência ou *locus* em qualquer uma de suas partes ou em sua totalidade (PATRIZI, 1943, p. 241; PATRIZI, 1996, p. 55, tradução nossa).

Do espaço físico ao geométrico em *Della nuova geometria*

As considerações de Patrizi sobre o espaço físico tiveram implicações na noção de espaço geométrico que foi considerada num tratado, publicado em 1587, intitulado *Della nuova geometria*. Essa "nova geometria", entretanto, não trazia nenhum resultado novo. Ela era "nova" porque tratava a respeito das noções próprias desse campo de conhecimento, tais como posições e contatos entre entes geométricos, bem como das dimensões das linhas, das superfícies e dos corpos, que permeavam os domínios da investigação do geômetra, considerando-as sob uma nova perspectiva. Ao longo dos quinze livros que compõem a obra, Patrizi procurou assentar a geometria em princípios que

¹⁶ Patrizi se refere às espécies e aos gêneros no sentido aristotélico. Aristóteles, *Categories*, III, 1b16-24 em Aristóteles (1952).

eram filosoficamente demonstrados e não simplesmente postulados ou admitidos implicitamente, tal como em *Elementos* de Euclides¹⁷.

Partindo do pressuposto de que "a ciência é um saber que é feito de três modos: pela definição da essência, pela demonstração das propriedades essenciais, e pela dedução a partir das causas" (PATRIZI, 1587, p. 1, tradução nossa), Patrizi observa que: "o primeiro desses três modos mostrou Euclides quando disse: 'O ponto é aquilo que não tem parte' (e para Euclides isso já bastava, supor que o ponto não tinha partes)" (p. 2, tradução nossa). Assim, ele propõe proceder de outra maneira, afirmando que: "(...) demonstraremos essa mesma propriedade do ponto, que é não ter parte, bem como muitas outras propriedades" (p. 2, tradução nossa).

Em *Della nuova geometria*, Patrizi propôs demonstrar, primeiro, a propriedade essencial de que "o ponto não tem partes" e, segundo, o que se poderia ser deduzido a partir daí. Seu objetivo era inverter a exposição dos conceitos geométricos encontrados em *Elementos*, começando por definir o espaço geométrico antes do ponto, da linha e da superfície. Desse modo, inicia apresentando cinco "pressupostos" (*supposizioni*),

- I. Todas as matemáticas, principais e subalternas, não são abstrações das coisas naturais, nem estão na imaginação, nem em Diana, mas procedem do espaço em geral.
- II. A geometria considera o ponto, a linha, o ângulo, a superfície e os corpos. E esta é sua ordem natural.
- III. O espaço é extensão e a extensão é o espaço.
- IV. Todo espaço é mínimo, ou máximo, ou mediano (*medio*), ou ainda intermediário (*mezano*).
- V. Todo espaço é longo, ou longo e largo, ou longo, largo e profundo (PATRIZI, 1587, p. 2-3, tradução nossa).

seguidos de oito definições:

- I. O espaço mínimo é aquele do qual não há espaço menor.
- II. O espaço máximo é aquele do qual não há espaço maior.

¹⁷ Os livros I e II discorrem sobre o ponto e os pontos no espaço. De III à IX e de IX à XIV, a obra traz várias considerações sobre as linhas, as retas, as perpendiculares, as paralelas, as inclinadas. No livro X, Patrizi tece considerações sobre os ângulos e, no XIV, aplica todas as considerações anteriores à construção de triângulos (Patrizi, 1587).

III. O espaço mediano é aquele do qual há um espaço maior, menor ou igual.

IV. O ponto é o mínimo no [dentro do] espaço.

V. A linha é um espaço longo ou comprido.

VI. O ângulo é um espaço aberto longo e largo.

VII. A superfície é um espaço fechado longo e largo.

VIII. O corpo é um espaço longo, largo e profundo (PATRIZI, 1587, p. 3, tradução nossa).

Por esses "pressupostos" e definições Patrizi procurou observar que o espaço geométrico era real (*actu*), finito e infinito. O espaço era infinito porque era o primeiro e não tinha como se tornar maior do que si mesmo, ou se alargar em qualquer parte, uma vez que era igualmente estendido em todas as partes. Por outro lado, o espaço era finito na medida que poderíamos considerar uma parte desse espaço infinito (PATRIZI, 1996, p. 53).

Segundo Edelheit (2009), essa associação de grandeza (*magnitudo*) e divisibilidade proposta por Patrizi permitia a ele rejeitar o antigo dogma que estabelecia que qualquer quantidade poderia ser dividida infinitamente. Desse modo, ele limitava qualquer forma de extensão ao infinito, tanto para o infinitamente grande, como para o pequeno. É nesse contexto que ele introduziu sua definição de ponto como o "*mínimo no (dentro do) espaço*".

O ponto, portanto, não era espaço e não possuía dimensão. Isso significava que o espaço, sendo contrário ao ponto, continha todas as dimensões. Ou seja, o espaço geométrico continha todas as partes, enquanto que o ponto era completamente "sem partes" e, portanto, indivisível. Conseqüentemente, todos os outros "membros" do espaço geométrico, tais como as linhas, as superfícies, os ângulos etc., se encontravam entre o espaço e o ponto. Assim, Patrizi estabeleceu seis axiomas por meio dos quais procurou determinar as relações e a hierarquia desses membros:

I. O primeiro é aquele que precede todos os outros segundo sua ordem.

II. O todo (*tutto*) é aquilo que tem partes.

III. Cada todo se divide em partes.

IV. Cada parte é menor que o todo.

V. Cada quantidade pode ser dividida, ou ainda é divisível.

VI. Cada divisível pode ser dividido (PATRIZI, 1587, p. 3-4).

O primeiro membro do espaço geométrico entre o ponto e o espaço, considerado por Patrizi, foi a linha. Mas, para ele, o ponto não podia ser o começo ou a origem (*principium*) da linha, tal como apregoavam os aristotélicos, pois essa ideia implicava em relacionar de forma direta o movimento ao ponto. Em *De spacio physico et mathematico*, Patrizi observava que a determinação da relação entre ponto e linha deveria deixar de lado conceitos como *principium*, *productio* e *motus* (origem, produção e movimento, respectivamente). Isso porque, o movimento era o quinto estágio na ordem dos seres, pois o tempo era posterior ao movimento e, o movimento anterior aos corpos. E antes dos corpos existiam ainda três estágios: três dimensões, duas dimensões, uma dimensão e o ponto (PATRIZI, 1996, p. 59-69). Portanto, a linha, a superfície e o corpo eram "sub-espacos" de dimensão 1, 2 e 3, respectivamente.

Desse modo, no segundo livro de *Della nuova geometria*, Patrizi concluía que¹⁸:

Dois ou mais pontos tocando-se, não produzem um corpo

E isso porque não é formada uma superfície a partir dos pontos

E isso porque não se fazem ângulos a partir dos pontos

E isso porque não se cria uma largura a partir dos pontos

E isso porque não se faz linha a partir dos pontos

E isso porque não se faz comprimento a partir dos pontos

E isso porque não se cria uma grandeza (*magnitudo*) a partir dos pontos

E isso porque a grandeza (*magnitudo*) não é obtida a partir dos pontos

E isso porque os pontos não se estendem no espaço

E isso porque os pontos não ocupam um espaço maior de um só ponto

E isso porque os pontos não ocupam espaço

E isso porque cada ponto é mínimo e não é quantidade (PATRIZI, 1587, p. 25-26, tradução nossa).

A linha não se originava a partir dos pontos porque era um espaço entre dois pontos. Ou seja, o ponto não podia gerar a linha porque não tinha dimensão, visto que não era nem grandeza

¹⁸ Vide as demonstrações de cada proposição (de I a XI) do livro II em Patrizi (1587, p. 19-25).

(*magnitudo*), nem quantidade. Conseqüentemente, aquela parte do espaço compreendida entre dois pontos era uma linha, entre três, uma superfície triangular, entre quatro, um corpo (uma pirâmide), entre outros pontos, outros corpos de três dimensões.

São várias as implicações da geometria proposta em *Della nuova geometria*. Vamos aqui apontar apenas uma delas relacionada à divisibilidade da linha. Na concepção de Patrizi, uma linha jamais poderia ser dividida *ad infinitum*, visto que era necessário existir uma porção "mínima" de linha. Como mencionamos, para Patrizi, não havia nada maior que o espaço. Mas se havia algo que era o "máximo", havia também aquilo que seria o "mínimo". Desse modo, se o espaço era o "máximo" do qual nada podia ser maior, necessariamente deveria existir um "espaço mínimo" do qual nada poderia ser menor do que ele. Conseqüentemente, tal como o espaço infinito (máximo) era infinitamente divisível, o espaço finito (mínimo) era finitamente divisível:

(...) o [espaço] contínuo é sempre atual (em ato) e não pode ser dividido pelo espírito nem em ato, nem em potência. Essa divisão pode ser somente imaginada. E, visto que o contínuo primordial¹⁹ é o máximo em ato, é necessário que haja nele um mínimo em ato, pois é necessário que, na natureza, existam os dois contrários. E, assim como o contínuo máximo é aquele de que nada pode ser maior, assim o contínuo mínimo é aquele de que nada pode ser menor. E, assim como a maior magnitude é aquela da qual nada pode ser maior, assim a menor magnitude será aquela da qual nada pode ser menor. E isso é tudo que pode ser considerando-se sua pequenez. Mas essa coisa menor de todas não é o ponto do qual nós discorremos, mas é o espaço mínimo. Nós dizemos que a grandeza mínima é o espaço mínimo ou o mínimo no (dentro do) espaço. Nesse sentido, a divisão do [espaço] contínuo, que foi considerado infinito, deve necessariamente findar (PATRIZI, 1996, p. 66-67).

Isso significava que uma reta poderia ser dividida infinitamente, porém um segmento de reta não era divisível *ad infinitum*, pois era um espaço "mínimo" compreendido entre dois pontos. Assim, ao considerar um segmento de reta, Patrizi observava que os pontos que o delimitavam não faziam parte dele, visto que os pontos não possuíam dimensão e eram indivisíveis. O segmento e a reta, portanto, não eram formados por pontos na medida em que o ponto não era a origem da linha. Desse modo, a reta e o segmento eram espaços contínuos, a reta infinita, e o segmento, finito.

¹⁹ Isto é, o espaço que precede todas as coisas.

Podemos dizer, nesse caso, que o ponto, a reta e o segmento tinham um lugar (*locus*) no espaço (*spacium*). Para Patrizi, a existência desse *locus*, em que se encontravam esses entes geométricos, permitia estabelecer diferentes relações entre esses entes e outros no (dentro do) espaço (*spacium*) geométrico. Desse modo, Patrizi não só considerou o espaço (*spacium*) como princípio da geometria, mas também, indiretamente, como seu objeto de investigação. Assim, a "nova geometria" de Patrizi não era somente uma ciência das figuras que se encontram no espaço, mas também uma ciência do próprio espaço (*scientia spaci*).

Considerações finais

Podemos dizer que Patrizi admitiu a existência real das linhas, superfícies e volumes no espaço que, para a filosofia natural de vertente aristotélica, não eram senão meras abstrações dos corpos naturais, portanto, irrealis, ou seja, imaginários. Além disso, Patrizi considerou que esses entes geométricos eram infinitos e que o geômetra apenas operava em sua imaginação com suas porções finitas (PATRIZI, 1943, p. 243-244; PATRIZI, 1996, p. 59).

Para chegar a essas considerações, Patrizi dialogou com diferentes visões filosóficas num contexto em que a própria geometria expressava-se de forma multifacetada, estabelecendo relações com diferentes segmentos de conhecimento. Tais considerações, entretanto, não procuraram atender a uma demanda essencialmente matemática, mas responder a questões de ordem metafísica e física. Foi num contexto em que diferentes aspectos ligados ao conhecimento, que as questões de geométricas passaram a ser consideradas. Esse estudo introdutório nos mostra que ao lidarmos com o conhecimento não devemos perder de vista os diferentes aspectos que compõem um conjunto de ações e práticas de uma época. *Della nuova geometria* de Patrizi é um exemplo bastante interessante que traz indícios do movimento do conhecimento no século XVI. Ao mesmo tempo em que as concepções de Patrizi se aproximam de nossa geometria, ao mesmo tempo dela se afasta. Esse movimento é decorrente da contingência histórica que, além de revelar aspectos familiares ao leitor do século XXI, também desvelam outros nexos conceituais que foram descartados, ou assimilados, no processo da construção do conhecimento matemático.

Referências bibliográficas

ALFONSO-GOLDFARB, A. M. Questões sobre a hermética: uma reflexão histórica sobre algumas raízes pouco conhecidas da ciência moderna. **Cultura Vozes**, p. 13-20, 1994.

- ARISTÓTELES. *The Works of Aristotle*. Chicago; London; Toronto: The University of Chicago Press, 1952, 2vols. v. 1.
- ASHWORTH, A. J. Patrizi da Cherso, Francesco (1529-97). In: CRAIG, E. (ed.). **Routledge Encyclopaedia of Philosophy**. New York; London: Routledge, 1998. v. 7, p. 261-265.
- BELTRAN, M. H. R., SAITO, F.; TRINDADE, L. S. P. *História da Ciência para formação de professores*. São Paulo: Ed. Livraria da Física; OBEDUC/CAPES, 2014.
- BROMBERG, C.; SAITO, F. História da Matemática e História da Ciência. In: BELTRAN, M. H. R.; SAITO, F.; TRINDADE, L. S. P. (orgs.). **História da Ciência: tópicos atuais**. São Paulo: Ed. Livraria da Física; CAPES, 2010. p 47-71.
- BRUNO, G. **Acerca do infinito, do universo e dos mundos**. 4a. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1998.
- COPENHAVER, B. P. (ed.). **Hermetica: The Greek *Corpus Hermeticum* and the Latin Asclepius in a new English translation, with notes and introduction**. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- COPENHAVER, B. P.; SCHMITT, C. B. **Renaissance Philosophy**. Oxford; New York: Oxford University Press, 2002.
- CUOMO, S. **Ancient Mathematics**. London; New York: Routledge, 2001.
- DANTI, E. **Le scienze matematiche ridotte in tavole**. Bologna: Compagnia della Stampa, 1577.
- DEE, J. **The Mathematical Preface of the Elements of Geometrie of Euclid of Megara (1570)**. New York: Science History Publications, 1975.
- DEITZ, L. Space, Light, and Soul in Francesco Patrizi's *Nova de universis philosophia (1591)*. In: GRAFTON, A.; SIRAISSI, N. (eds.). **Natural Particulars: Nature and the Disciplines in Renaissance Europe**. Cambridge; London: The MIT Press, 1999. p. 139-169.
- DESCARTES, R. *Princípios da filosofia*. Lisboa: Edições, 1997.
- EDELHEIT, A. Francesco Patrizi's two books on space: geometry, mathematics, and dialectic beyond Aristotelian science. **Studies in History and Philosophy of Science**, v. 40, p. 243-257, 2009.
- EUCLIDES. *Elementi* In ACERBI, F. (ed.). **Tutte le opere**. Milano: Bompiani, 2007. p. 777-1857.
- GOULDING, R. **Defending Hypatia: Ramus, Saville, and the Renaissance Rediscovery of Mathematical History**. Dordrecht: Springer, 2010.
- GRANT, E. **Much Ado About Nothing: Theories of Space and Vacuum from the Middle Ages to the Scientific Revolution**. New York; London: Cambridge University Press, 1981.
- HENRY, J. Void Space, Mathematical Realism, and Francesco Patrizi da Cherso's Use of Atomistic Arguments. In: LUETHY, C. et al. (eds.). **Late Medieval and Early Modern Corpuscular Matter Theory**. Leiden: E. J. Brill, 2001. p. 133-161.
- HOMANN s.j., F. A. Introduction. In: HUGH OF SAINT VICTOR. **Practical Geometry [Practica Geometriae] attributed to Hugh of St. Victor**. Milwaukee/Wisconsin:

Marquette University Press, 1991. p. 1-30.

HUGH OF SAINT VICTOR. **The Didascalicon of Hugh of St. Victor**: A medieval guide to the arts (Ed. J. Taylor). New York; London: Columbia University Press, 1961.

_____. **Practical Geometry [Practica Geometriae] attributed to Hugh of St. Victor**. Milwaukee; Wisconsin: Marquette University Press, 1991.

LEWIS, M. J. T. **Surveying instruments of Greece and Rome**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

NÖEL, É. Première lettre du P. Noël a Pascal. In: BRUNSCHVIG, L.; BOUTROUX, P.; GAZIER, F. (eds.). **Oeuvres de Blaise Pascal**. Paris: Hachette, 1904-1914, 14 vols. v. II.

PASCAL, B. Reponse de Blaise Pascal. In: BRUNSCHVIG, L.; BOUTROUX, P.; GAZIER, F. (eds.). **Oeuvres de Blaise Pascal**. Paris: Hachette, 1904-1914, 14 vols. v. II.

PATRIZI, F. **Della nuova geometria di Franc. Patrici libri XV**. Ne' quali con mirabile ordine, e con dimostrazioni à marauiglia più facili, e più forti delle usate si vede che la matematiche per uia regia, e più piana che da gli antichi fatto non si è, si possono trattare Ferrara: Vittorio Baldini, 1587.

_____. On Physical Space. (B. Brickman, trans.). **Journal of the History of Ideas**, v. 14, n. 2, p. 224-245, 1943.

_____. **De spacio physico et mathematico**. (H. Védrine, trans.) Paris: J. Vrin, 1996.

RAMELLI, I. (ed.). **Corpus Hermeticum**. Milano: Bompiani, 2005.

RATTANSI, P. M. Hermetismo e a revolução científica. In: ALFONSO-GOLDFARB, A. M.; BELTRAN, M. H. R. (orgs.). **Escrevendo a história da ciência: tendências, propostas e discussões historiográficas**. São Paulo: Ed. Livraria da Física; Educ; FAPESP, 2004. p. 41-48.

ROUX, S. Forms of Mathematization (14th-17th Centuries). **Early Science and Medicine**, v. 15, p. 319-337, 2010.

SAITO, F. Alguns aspectos da ideia de experiência de Blaise Pascal (1623-1662). In: ALFONSO-GOLDFARB A. M.; BELTRAN, M. H. R. (orgs.). **O saber fazer e seus muitos saberes: experimentos, experiências e experimentações**. São Paulo: Ed. Livraria da Física; Educ; FAPESP, 2006a. p. 119-144.

_____. O vácuo de Pascal *versus* o Ether de Noël: uma controvérsia experimental?. **Circumscribere: International Journal for the History of Science**, v. 1, p. 75-87, 2006b.

_____. História da Física. In: BELTRAN, M. H. R.; SAITO, F.; TRINDADE, L. S. P. (orgs.). **História da Ciência: Tópicos atuais**. São Paulo: CAPES; Ed. Livraria da Física, 2010. p. 31-46.

_____. **As experiências relativas ao vazio de Blaise Pascal**. São Paulo: Ed. Livraria da Física; CAPES/OBEDUC, 2014a.

_____. Instrumentos matemáticos dos séculos XVI e XVII na articulação entre história, ensino e aprendizagem de matemática, **Rematec**, 2014b [no prelo].

SHELBY, L. R. The Geometrical Knowledge of Medieval Master Masons. **Speculum**, v. 47, p. 395-421, 1972.

SLADEK, M. **La Stella di Hermes**: Frammenti di Filosofia Ermetica. Milano: Mimesis, 2005.

STEVENS, W. M. Euclidean Geometry in the Early Middle Ages: A Preliminary Reassessment. In: ZENNER, M.-T. (ed.). **Villard's Legacy**: Studies in Medieval Technology, Science and Art in Memory of Jean Gimpel. Aldershot: Ashgate, 2004. p. 229-263.

TELESIO, B. *La natura secondo i suoi principi*. Milano: Bompiani, 2009.

THULIN, C. O. (ed.). *Corpus Agrimensorum romanorum I. Opuscula agrimensorum veterum*. Leipzig: Teubner, 1913.

VITTORI, T. de. **Les notions d'espace en géométrie**: De l'Antiquité à l'Âge Classique. Paris: L'Harmattan, 2009.

VITRÚVIO. **Da Arquitetura**. São Paulo: Hucitec/Fundação Para a Pesquisa Ambiental, 1999.

YATES, F. A. **Giordano Bruno e a tradição hermética**. São Paulo: Cultrix, 1995.

ZAITSEV, E. A. The Meaning of Early Medieval Geometry: From Euclid and Surveyor's Manuals to Christian Philosophy. *Isis*, v. 90, 522-553, 1999.