Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 14 nº 28 - pág. 01-23
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

PEIRCE E CANTOR: UM ESTUDO PRELIMINAR SOBRE CONTINUIDADE E INFINITESIMAIS

Maria de Lourdes Bacha
Universidade Presbiteriana Mackenzie – UPM – Brasil
CESIMA/PUCSP – Brasil

Fumikazu Saito
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUCSP – Brasil
CESIMA/PUCSP – Brasil
HEEMa/PUCSP – Brasil

(aceito para publicação em março de 2014)

Resumo

O objetivo deste artigo é apresentar alguns tópicos referentes a continuidade aos os infinitesimais nos trabalhos de Charles Sanders Peirce (1839-1914) e George Cantor (1845-1918). Seu contexto pode ser considerado em três ângulos: histórico, filosófico e matemático. Apresenta-se aqui alguns pressupostos que nortearam as investigaçoes de Peirce sobre a continuidade, conduzindo-o a resultados paralelos àqueles de seus contemporâneos, notoriamente, Cantor e Dedekind.

Palavras-chave: Matemática, História, Cantor, Peirce.

[PEIRCE AND CANTOR: A PRELIMINARY STUDY ON CONTINUITY AND INFINITESIMALS]

Abstract

This article aims at introducing some topics related to continuity and infinitesimals in the works of both Charles Sanders Peirce (1839-1914) and George Cantor (1845-1918). The context can be considered from three different points of view: historical, philosophical and mathematical. It is presented some principles that have guided Peirce´s studies on continuity, leading him to paralleled results when compared with some of his contemporaries, especially Cantor and Dedekind.

Keywords: Mathematics, History, Cantor, Peirce.

Introdução

Charles Sanders Peirce (1839-1914) é celebrado entre estudiosos de filosofia, de semiótica e de lógica. Entre os estudiosos de filosofia, é conhecido pelo desenvolvimento da escola americana do pragmatismo e por sua doutrina do idealismo objetivo, em oposição ao nominalismo, além de ter influenciado o pensamento de William James (1842-1910) e John Dewey (1859-1952). Entre os estudiosos de semiótica, é celebrado por suas distinções, classificações e terminologia das categorias e dos signos (primeiridade, secundidade, terceirdade, ícone, índice, símbolo). E, entre os lógicos, por seus trabalhos sobre lógica boolena e lógica dos relativos[1] (MIZAK, 2004).

Embora Peirce tenha um lugar de destaque na história da filosofia, da semiótica e da lógica, pouco lugar lhe foi dedicado na história da matemática. Isso, provavelmente, se deve ao fato de não ter ocupado uma posição acadêmica duradoura, apesar de ter sido filho do matemático norte-americano, Benjamin Peirce (1809-1880), e ter estado no centro do debate sobre a continuidade e os infinitesimais, tendo se correspondido com G. Cantor (1845-1918) e R. Dedekind (1831-1916) (DAUBEN, 1977; EISELE, 1985).

Como seu pai[2], Peirce se dedicou a estudos de matemática, notoriamente à teoria dos conjuntos e à lógica matemática. Seus estudos e investigações, entretanto, foram desenvolvidos de forma independente de seus pares europeus. Diferentemente de seus contemporâneos do outro lado do oceano Atlântico, Peirce ancorou seus estudos sobre a continuidade e os infinitesimais em outros pressupostos filosóficos. Assim, este trabalho busca apresentar alguns indícios de que, a despeito da coincidência de objetos de estudo entre Peirce e Cantor, o estilo e a origem das abordagens e das concepções filosóficas são diferentes[3].

A Matemática nos Estados Unidos da América

O tema deste artigo circunscreve-se à segunda metade do século XIX e à primeira década do século XX. De um lado, vale enfatizar que na Europa do século XIX, a matemática se caracterizou por grande exigência de rigor e apresentou desenvolvimentos significativos, dentre os quais se podem destacar: a redução dos conceitos fundamentais da análise infinitesimal (limite, derivada, integral etc.) ao estudo dos números reais realizada por L. A.

[1] Seus estudos em lógica o elegeram para the National Academy of Sciences com base em seu trabalho sobre logica (QUINE, 1999).

[2] Peirce tinha fortes convicções religiosas e parece não haver dúvida de que tenha sido influenciado por seu pai (unitarista) em termos de assuntos religiosos, embora mais tarde tenha se voltado para a Igreja Pentecostal, trinitarista.

[3] Quanto às fontes primárias, as principais obras de Charles Sanders Peirce consultadas foram: *Collected Papers*- Vols.1-6 (1931-35)*; Collected Papers* - Vols.7-8 (1958); *The New Elements of Mathematics by Charles S. Peirce* (1976); *Essential Peirce, vol 1* (1992) *e Essential Peirce vol.2* (1998) *e Historical Perspectives in Peirce's Logic of Science* (1985). Quanto às obras de Georg Cantor foram consideradas principalmente as traduções francesas disponibilizadas em *Acta Mathematica*: "Fondements d'une théorie générale des ensembles" (1883), "une contribution a la théorie des ensembles" (1883), "Sur les ensembles infinis et linéaires de points" (1883), "De la puissance des ensembles parfaits de points" (collected), com também traduções em textos de Vilela (1993), Nascimento Jr. (2006), Santos (2008), Belna (2011).

Cauchy (1789-1857); a aritmetização da análise, a redução dos conceitos fundamentais da análise aos conceitos da aritmética por K.Weierstrass (1815-1897); o sistema dos números reais, a teoria dos conjuntos e os transfinitos por Cantor e Dedekind; axiomatização da matemática por G. Peano (1858-1932); surgimento das geometrias não euclidianas, resultando na escola, chamada formalista, que teve como principal representante D. Hilbert (1862-1943) (ROQUE, 2012; BROMBERG; SAITO, 2010) [4].

Embora no continente europeu a matemática estivesse se desenvolvendo plenamente, nos Estados Unidos da América, ela se mantinha bem tímida e dependente de modelos europeus, contribuindo muito pouco para o desenvolvimento desta área de conhecimento (DAUBEN, 1977, 1990). Pode-se dizer que naquela época, o estado da ciência básica nos Estados Unidos pouco se desenvolveu em consequência da combinação de democracia com oportunidades econômicas. Pautando-se na ideia de que qualquer um, com trabalho duro, poderia transformar os recursos nacionais do país em fortuna pessoal, era comum adotar uma postura pragmático-utilitarista em relação ao conhecimento científico-matemático, considerando a ciência apenas um meio para explorar os recursos da natureza. Assim, diferentemente da Europa, onde algumas monarquias e aristocracias incentivavam a ciência pura, nos Estados Unidos, o apelo utilitário era muito valorizado por razões religiosas, políticas ou empresariais e pouco interesse foi dado ao estudo abstrato, pois não parecia oferecer evidência de utilidade imediata (DAUBEN, 1977).

Segundo Eisele (1985), as necessidades matemáticas dos Estados Unidos naquela época estavam direcionadas para grandes levantamentos não só ligados à agrimensura, mas também aos problemas ligados à astronomia. Dessa forma, eram poucos os matemáticos que se dedicavam exclusivamente à investigação matemática, o que explicaria os tímidos avanços nesta área até a segunda metade do século XIX.

Pode-se dizer que a matemática norte-americana parece ter começado a se desenvolver a partir de 1876, na recém-fundada Johns Hopkins University, com a contratação do matemático inglês J. J. Sylvester (1814-1897). Grande parte do desenvolvimento da matemática nos Estados Unidos deveu-se, assim, em parte à divulgação de trabalhos desenvolvidos por matemáticos norte-americanos, a partir de 1878, pelo periódico *American Journal of Mathematics*, editado por Sylvester naquela universidade. Além disso, a Johns Hopkins University teria servido de incentivo à implantação de cursos de pós-graduação em matemática em outras universidades norte-americanas, tais como a Universidade Clark, fundada em 1889 e a Universidade de Chicago, fundada em 1892 (DAUBEN, 1977).

Em linhas gerais, pode-se dizer que a matemática norte-americana permaneceu praticamente sem apoio, quer institucional ou financeiro, até o final do século XIX, mesmo que alguns presidentes, entre eles Thomas Jefferson (1743-1826) e James A. Garfield (1831-1881), por exemplo, tivessem interesse pela matemática (DAUBEN, 1977). As investigações e estudos em matemática naquele país até inícios do século XX foram desenvolvidos por indivíduos ricos, tal como J. W. Gibbs (1839-1903), que lecionou na

[4] Os panoramas históricos de Buckley (2012), Zalamea (2012), Putnan (1982), Tannery (1885), Dauben (1999), Roque (2012) e outros historiadores da matemática, ajudaram a situar os trabalhos de Peirce e Cantor, considerando-se os contextos, práticas da época e as comunidades científicas de que participavam.

Universidade de Yale por muitos anos sem a contrapartida monetária (DAUBEN, 1977). Sem apoio institucional e pouco investimento, o campo da matemática não teria encontrado, dessa maneira, terreno fértil para se desenvolver tal como ocorrera na Europa.

Mas isso, entretanto, não significa que o desinteresse pela matemática fosse generalizado. A parca produção matemática parecia incomodar alguns matemáticos porque muitos estudantes norte-americanos cruzavam o oceano para estudar na Alemanha, em centros como Berlim e Göttingen, ao invés de se formarem nas universidades norte-americanas que ofereciam grau de Doutor em Filosofia Matemática, tais como Harvard, Yale e Princeton. Tal é o caso do matemático C. J. Keyser (1862-1947), que condenava o baixo nível de produtividade dos matemáticos norte-americanos antes da virada do século XIX. Ele chamava a atenção para o isolamento intelectual dos norte-americanos, observando que, do outro lado do Atlântico, a matemática era uma ciência vasta e crescente, complexa, técnica e cada vez mais especializada (DAUBEN, 1977; BELNA, 2011; BOYER, 1974; EVES, 1995).

É nesse contexto, em que a matemática norte-americana começava a dar seus primeiros passos, que se deve situar Peirce e seus estudos. O interesse de Peirce pela matemática surgiu não apenas por causa da influência de seu pai, sua inclinação para o estudo da matemática estava também relacionada com suas convicções de natureza epistemológica no que dizia respeito ao estatuto da matemática na classificação do conhecimento. Peirce considerava a matemática como a ciência mais geral na organização do conhecimento, pois acreditava que ela fornecia os fundamentos para todas as demais áreas do saber, incluindo-se aí também a filosofia (MOORE, 2009; HERRON, 1997).

Tais convicções podem ser encontradas em suas reflexões sobre a continuidade, tema que dominou as investigações matemáticas e filosóficas no século XIX. Para Peirce, a doutrina da continuidade, que denominou "sinequismo", não seria mera metafísica, mas um princípio regulativo da lógica, que proibia aceitar o inexplicável como explicação possível (CP 6.173)[5]. Segundo Bacha (2002), o sinequismo asseverava que as leis e os sistemas do universo evoluíam, gradualmente, no sentido de uma continuidade matemática. Como será abordado mais adiante, Peirce chegaria a dar uma interpretação muito particular à continuidade e aos infinitesimais por meio desse mesmo princípio.

Cantor: continuidade e infinito

O ano de 1872 foi crucial na direção da aritmetização da análise com apresentação de contribuições de cinco matemáticos: Charles Méray (1831-1911), Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897), Heinrich Eduard Heine (1821-1881) e Cantor. Foi naquele ano que Cantor publicara seu trabalho intitulado "Sobre a extensão de um teorema relativo à teoria das séries trigonométricas", em cuja demonstração expôs sua teoria para os números reais e apresentou alguns elementos de topologia. Também foi em 1872, que Dedekind publicara a sua construção dos números reais em termos de seus famosos "cortes" (DAUBEN, 1990; BELNA, 2011).

---

[5] As obras de Peirce serão citadas obedecendo às abreviações comumente aceitas entre seus estudiosos: CP-Collected Papers; NEM-New Elements of Mathematics; EP1-Essential Peirce 1; EP2-Essential Peirce 2.

Cantor começou a estudar matemática, além de física e filosofia, em Berlim, em 1863, sob a direção de Kummer, Weierstrass e Kronecker. Sua dissertação tratou da teoria dos números e a tese de doutorado, defendida em 1869, dedicada à aritmética e álgebra, sob orientação de Kronecker, lhe conferiu o titulo de assistente remunerado na Universidade de Halle (DAUBEN, 1990; BELNA, 2011).

Encontram-se entre as principais contribuições de Cantor para a Matemática os trabalhos "Sobre a extensão de um teorema relativo à teoria das series trigonométricas" (1872)[6], "Contribuições para o fundamento da teoria dos conjuntos transfinitos" (Beiträge) (1895-1897)[7] e "Contribuição para teoria dos conjuntos" (1879)[8]. Além disso, perfilam entre seus estudos, aqueles publicados entre 1879 a 1884, ou seja, a série de seis artigos sobre os conjuntos infinitos e lineares de pontos, entre os quais, *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*[9] (*Fundamentos de uma teoria geral dos conjuntos*) que foi editado separadamente em 1883. É neste trabalho que se encontra a primeira apresentação sistemática dos números transfinitos, de caráter matemático e filosófico, que, segundo Belna (2011, p. 29) teria provocado "polêmicas acirradas" em virtude de seu conteúdo inovador e original.

Ciente de que o tratamento dado ao infinito causava polêmica de natureza filosófica, Dauben (1971, 1990) observa que Cantor teria escrito este artigo para se defender dos argumentos de natureza metafísica e epistemológica que impediam a aceitação dos infinitos reais que estavam implícitos em sua teoria sobre os números transfinitos. Assim, no prefácio de *Grundlagen*, Cantor explicita que o estudo foi destinado a dois grupos: aos filósofos, que dariam seguimento ao desenvolvimento da matemática até o período mais recente, e aos matemáticos, que estariam familiarizados com os mais importantes escritos da filosofia (CANTOR, 1884).

Pode-se dizer que a teoria dos conjuntos de Cantor representa um marco no desenvolvimento da matemática. Seu aparecimento e desenvolvimento deixaram consequências que vão além da matemática. Isso é notório considerando-se o debate científico que se seguiu, principalmente após a apresentação dos números transfinitos, reavivando uma discussão que remontava às antigas disputas ontológicas da filosofia pré-socrática desde Anaximandro (*c.*610-547 a.E.C.), Pitágoras (*c.*571-497 a.E.C.), Parmênides (*c.*515-[?]a.E.C.), Platão (*c.*428-348 a.E.C.), Aristóteles (*c.*384-322 a.E.C.) até Giordano Bruno (1548-1600), Galileu Galilei (1564-1632), Gottfried W. Leibniz (1646-1716), Immanuel Kant (1724-1804) e outros (SANTOS, 2008).

Como é bem conhecido dos historiadores da ciência e da matemática, Cantor enfrentou a oposição de matemáticos que eram partidários do "finitismo", tais como Kronecker (1823-1891) e Gauss (1777-1855), que temiam que o infinito real pudesse abrigar paradoxos que desafiassem a certeza da matemática. Mas mesmo assim, ele

[6] CANTOR (1883).
[7] CANTOR (1955).
[8] CANTOR (1883).
[9] CANTOR (1883).

incorporou o infinito[10] atual como legítimo objeto da matemática a partir do qual buscou elaborar sua teoria dos conjuntos.

No artigo de 1874, em que Cantor trata da formulação do enumerável e do contínuo, a caracterização dos números reais foi feita através da comparação dos números reais com o conjunto dos números algébricos. O conjunto dos números reais foi denominado por Cantor "contínuo" e o conjunto dos algébricos, "enumerável", ou um conjunto no qual seria possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os números e os números algébricos. Essa comparação indicava que conjuntos infinitos poderiam ser distintos quantitativamente. A distinção entre os tamanhos de conjuntos infinitos constituiu, assim, a base da teoria dos números transfinitos, desenvolvida entre 1883, 1895 e 1897.

A ideia de transfinito de Cantor abarcava, portanto, o domínio dos números que se prestavam a contar e comparar o infinito. Nesse particular, Nascimento Jr. (2006) observa que a origem da teoria cantoriana dos conjuntos remonta aos trabalhos sobre o desenvolvimento de funções quaisquer por meio de séries trigonométricas do matemático francês J. B. J. Fourier (1768-1830). Foi considerando o problema da unicidade de tal desenvolvimento para uma dada função, que Cantor teria chegado a conceitos fundamentais de sua teoria a respeito dos números e tipos transfinitos. Assim, segundo Nascimento Jr. (2006), a teoria de Cantor sobre os números transfinitos poderia ser considerada uma espécie de generalização de procedimentos e conceitos para resolver problemas relativos à representação de funções através de somatórios de funções seno e cosseno.

Pode-se dizer que, ao refletir sobre o contínuo, Cantor buscava provar a natureza não enumerável dos números reais, que diferiam dos racionais e algébricos. O texto de 1872 traz, assim, uma primeira abordagem do contínuo por meio do conjunto dos reais, embora Cantor não examine nele a noção de continuidade, nem as características do que seria o contínuo[11].

O contínuo seria uma questão que acompanharia Cantor por toda sua vida. Em *Grundlagen*, por exemplo, se encontra a seguinte caracterização: "*De acordo com a minha maneira de conceber as coisas, entende-se por contínuo somente um conjunto perfeito e de uma só peça"* (CANTOR, 1884, p. 208). Ou seja, um conjunto seria chamado perfeito se fosse idêntico ao seu primeiro derivado e, portanto, a todos os seus derivados sucessivos (necessidade topológica, que decorreria da derivação). Um conjunto também seria chamado de uma peça se fosse conexo, isto é, se entre dois de seus pontos existisse sempre um número finito de pontos, tais que todas as distâncias fossem tão pequenas quanto se quisesse (necessidade métrica e que decorreria da noção de distância).

---

[10] Cantor não foi o único que provou a existência do infinito atual, nem foi o primeiro. Vale enfatizar que Dedekind também exerceu papel importante nesta questão. Embora antes Bemard Bolzano (1781-1848) também tivesse se dedicado a uma formulação do conceito de infinito, foi Cantor que desenvolveu uma teoria abrangente sobre o infinito (BELNA, 2011).

[11] Em outro contexto, seria interessante considerar o debate entre aqueles que acreditavam que um contínuo nunca poderia ser composto por elementos indivisíveis, e aqueles que pensavam o contrario. Na origem deste debate, Aristóteles argumentava que um contínuo nunca poderia ser composto de indivisíveis, enquanto Arquimedes expunha o contrário tendo feito avanços matemáticos com base nesse pressuposto. No início do período moderno, a rejeição de Aristóteles levou à expansão do conceito de número. Leibniz estava convencido de que o argumento de Aristóteles estava correto, e que o contínuo não poderia ser composto de indivisíveis (KEELE, 2008).

Com estas duas condições (necessidade topológica e necessidade métrica), Cantor acreditava ter estabelecido um conceito puramente aritmético de *point-continuum*, sem se basear em intuições ou experiências. Cantor acreditava que esta noção poderia ser aplicada para se entender os contínuos não matemáticos de espaço e tempo. Em outros termos, o *point-continuum* foi por ele concebido como aquele contínuo de entidades discretas, tais como uma coleção de números em uma linha reta, afigurando-se como a essência da continuidade. Dos conceitos de infinito apresentados tecnicamente e filosoficamente surgiram, então, as noções de conjunto:

> *Por conjunto, entendemos qualquer reunião M em um todo de objetos m bem definidos e bem diferenciados de nossa intuição ou de nosso pensamento: esses objetos são chamados os elementos de M.* (CANTOR, 1884, p.282)

Ou ainda de potência (número cardinal):

> *Chamamos potência ou numero cardinal de M o conceito geral, que apoiado em nossa faculdade ativa de pensamento, resulta do conjunto M quando fazemos abstração da natureza de seus diferentes elementos m e da ordem em que eles são dados.* (CANTOR, 1884, p.282).

Cantor acreditava que, com suas distinções recém-descobertas entre o infinito potencial e o infinito atual, não haveria razão para manter polêmicas, sendo possível responder a matemáticos como Gauss, filósofos como Aristóteles, e teólogos como Tomás de Aquino (1225-1274). O infinito potencial corresponderia a um processo indefinido, ou seja, algo que poderia ser aumentado, continuado ou estendido, tal como a sequência dos números naturais (0, 1, 2, 3, 4...), em que haveria sempre a possibilidade de somar mais um, estendendo-a indefinidamente.

Por sua vez, no que diz respeito ao infinito atual ou em ato, parte da compleição e atualidade do infinito, Cantor o definiu como um ponto bem determinado distante infinitamente de qualquer ponto cuja determinação seja feita com coordenadas finitas. (, pp. 15-40)

Convém observar que o infinito potencial consistia num processo por meio do qual um número crescia para além dos limites finitos. Por outro lado, o infinito atual não seria um processo, mas o resultado final desse mesmo processo. Assim, Cantor foi levado a considerar não apenas os problemas epistemológicos levantados por seus números transfinitos, mas também a formular uma metafísica. Em seu tratamento dado aos números transfinitos, assim como em sua teoria dos números irracionais, ele não pôde evitar sua profunda preocupação por questões de ontologia e da filosofia do número geral.

Como bem observam Nascimento Jr. (2006) e Dauben (1990, 1971), para Cantor, o infinito era um objeto acabado, findo e, portanto, passível de ser estudado e matematizado, dentro de certos limites, como os objetos finitos. A partir desta intuição fundamental do infinito como algo terminado, atual, ele elaborou a sua teoria dos números transfinitos, constituindo-os como uma extensão dos números finitos. O que significava que o infinito poderia se manifestar na forma de infinito atual, chegando ao entendimento, mesmo que de forma paradoxal, na forma do infinito absoluto. Para Cantor, isso refletia a infinitude de Deus ou de seus atributos e o transfinito, como concretude, isto é, na qualidade da totalidade das criaturas criadas por Deus. Segundo Cantor:

> *O infinito sempre surge em três contextos: primeiro quando ele se apresenta em sua forma mais completa, em uma entidade sobrenatural completamente independente,* in Deo*, à qual denomino de Infinito absoluto ou simplesmente de Absoluto, segundo quando ele ocorre no eventual, mundo criado; terceiro quando a mente o entende em abstracto como uma magnitude matemática, número ou tipo ordenação.* (CANTOR, 1984, p.5).

É possível dizer que segundo a tese cantoriana muitas características do infinito estão presentes na inteligência humana, uma vez que, sem tal presença, o próprio infinito absoluto não seria reconhecido como tal. Daí se segue o entendimento humano, embora limitado pela própria natureza humana, não ser essencialmente finito no sentido mencionado, mas ter, em si mesmo, a infinitude como uma de suas qualidades reconhecíveis. Desse modo, um dos argumentos contra a teoria cantoriana reside na essencial finitude da inteligência humana, o que, em princípio, limitaria o seu acesso ao âmbito do finito. Por conseguinte, não seria possível qualquer discurso sobre o infinito, posto que a inteligência, por limitações inerentes, seria incapaz de conceber o infinito de forma atual (NASCIMENTO JR., 2006; DAUBEN, 1990, 1971). Como observava Cantor:

> *O verdadeiro infinito ou Absoluto, que está em Deus, não precisa de qualquer determinação. E isso sem qualquer contestação porque, em meu entender, o principio omnins determiantio esta negatio não pode ser questionado.* (CANTOR, 1884, p.175-176).

Peirce e Cantor: continuidade, infinito e infinitesimais.

Peirce tomou conhecimento dos estudos de Cantor por volta de 1883/84 por meio de sua edição francesa (CP 3.563, NEM III-2.583). Pode-se dizer que Peirce teve grande interesse nas discussões não só de natureza matemática, mas também filosófica das ideias de Cantor. A esse respeito, convém observar que no *Collected Papers* há trinta e duas passagens nas quais Peirce discute as teorias cantorianas, além dos registros de duas cartas enviadas por ele a Cantor. Além disso, em *The Logic of Relatives* (CP 3.548), Peirce apresenta uma prova para o teorema de Cantor, à qual parece ter chegado independentemente deste.[12] (CP 4.196).

[12] Peirce insistia que em Janeiro de 1897, em um artigo para o the Monist (VII 215), havia provado antes de Dedekind que a multitude de possiveis coleções de membros de qualquer coleção dada é maior que a multitude da ultima coleção propriamente dita (CP 3.556).

Peirce parece ter sido um grande admirador de Cantor. Indícios a esse respeito podem ser encontrados em várias partes de seus *Collected Papers*. Na passagem CP 4.331, por exemplo, Peirce parece lhe prestar homenagem, observando que Cantor era:

> [...] *Indiscutivelmente, ele é o Hauptförderer of (divulgador/ patrocinador) da doutrina lógico-matemática dos números. Quanto a Dedekind, seu pequeno livro Was sind und was sollen die Zahlen? é engenhoso e excelente.* (CP 4.331).

Além disso, parece se reconhecer como seguidor de Cantor, visto que em CP 3.570, explicita que: *"Minha intenção naquela passagem era simplesmente deixar claro,de maneira geral, que não sou mais do que um seguidor de Cantor no que se refere ao infinito."* (CP 3.570).

Outros indícios de sua admiração pelo matemático podem ainda ser encontrados em seus escritos. Numa de suas cartas, por exemplo, Peirce elogia a obra de Cantor: *"Antes de ler seus maravilhosos e profundos estudos (de fato, acabei de ler sua biografia em Math, Annalen XLVI and XLIX…)"* (Carta a Cantor, Milford PA, 1900 Dec 21). Em outras passagens reconhece o ineditismo do matemático ao observar que: *"Foi Cantor o primeiro a provar que as quantidades irracionais formam uma coleção que excede a coleção das quantidades racionais."* (CP 4.204); ou ao afirmar que: *"[...] Isto é comprovado pelo fato de o mundo teve que esperar George Cantor informar que o conjunto de frações racionais era um conjunto exatamente igual ao dos números inteiros. "* (CP 4.199).

Mas essa admiração pelo trabalho de Cantor foi também acompanhada de uma leitura crítica. Em 1881, Peirce publicou o artigo intitulado "On the Logic of Number" (CP 3.252-288) no *American Journal of Mathematics,* em que caracterizava a diferença entre o finito e os conjuntos infinitos bem antes de Dedekind (que o fez em 1888). Peirce não aceitava o logicismo de Dedekind, que considerava a teoria lógica fundacional e, consequentemente, a matemática como um de seus ramos. Nesse artigo, Peirce descreve a diferença entre classes finitas e infinitas, que foi por ele desenvolvida quando lecionava lógica na Universidade Johns Hopkins.

Cabe observar que, naquela época, Peirce era uma figura mais conhecida internacionalmente[13] do que comumente se considera. Visitou a Europa cinco vezes entre 1870 e 1883 e, embora geralmente viajasse como cientista por causa de seus estudos sobre pêndulos, se encontrou com matemáticos, lógicos e cientistas incluindo-se De Morgan, McColl, Jevons, Clifford e Spencer. Além disso, ainda manteve correspondência com estudiosos como Schrõder, Cantor, Kempe, Jourdain, Victoria Lady Welby. (INTRODUCTION, EP1).

[13] Foi membro da American Academy of Arts and Sciences, da National Academy of Sciences, da American Association for the Advancement of Science, da American Metrological Society, da London Mathematical Society, e mais tarde da New York Mathematical Society. Contribuiu para American Journal of Science, Nature, American Journal of Mathematics, American Journal of Psychology and Science, Memoirs of the American Academy and National Academy e Proceedings of the International Geodetic Association. Vale destacar que os 37 papers apresentados a National Academy of Sciences entre 1878 e 1911 versavam sobre lógica, matemática, física, geodésica, espectroscopia e psicologia experimental (EP1; EP2; EISELE (org), 1970, 1976 e 1985).

Segundo Dauben (1977, p. 122), o trabalho de Peirce foi “dramaticamente diferente em suas origens, inspiração e características matemáticas”, embora o estudo sobre a continuidade o tenha levado a produzir resultados paralelos em alguns aspectos às contribuições de Cantor e Dedekind na Alemanha. Com efeito, seria essa incursão de Peirce pela ciência, tal como veremos a seguir, que daria um tom diferenciado a suas ideias sobre o contínuo.

Vale lembrar que, de um lado, Dedekind e Cantor consideravam que o contínuo poderia, efetivamente, ser composto por elementos atômicos. Ambos afirmavam que os números reais formavam um contínuo sem a necessidade de adição de qualquer outro elemento, matemático ou não. E, de outro lado, Paul Du Bois Reymond (1831-1889) e Peirce aceitavam a ideia de infinitesimais:

> *Por exemplo, as relações de uniformidade e excesso de multitude descritas após Cantor, a filosofia não pode evitar a pergunta que imediatamente emerge: dois conjuntos devem ser iguais ou um deve ser maior que o outro, ou podem ser tão multitudinosos que a unidade de nenhum deles pode ser considerada uma relação de um para um no que diz respeito à unidade do outro? [...] Como devemos proceder no sentido de descobrir se esta última relação é possível ou não?* (CP 4.117)

Como também, a seguir:

> *Em primeiro lugar, não se deve supor que, mesmo que um conjunto seja tão grande que as unidades que o constituem percam sua identidade individual, uma relação de um para um torna-se necessariamente impossível. Se tal relação implicasse a realização de uma dada operação, ela seria de fato impossível, eu imagino. Mas este não é o caso. Conforme o conjunto aumenta e as diferenças individuais fundem-se pouco a pouco, ele também passa do domínio da força bruta para o domínio das ideias que é governado por regras. Isto parece vago porque não posso dar exemplos até que tenha mostrado como desenvolver a ideia de tal conjunto. Mas, na verdade, não é necessário construir a correspondência. Basta supor que um certo número de unidades dos dois conjuntos são trazidas para este tipo de relação (e, na verdade, eles sempre estão neste tipo de relação), então a regra geral da origem destes dois conjuntos pede que todos os outros elementos estejam em seus lugares na correspondência.* (CP 4.178)

Convém observar que, em 1878, Peirce definira continuidade como “a passagem de uma forma para outra por graus imperceptíveis”, no contexto de estudos de botânica. Segundo Peirce, dois exemplos muito semelhantes da mesma espécie botânica difeririam um dos outros por graus imperceptíveis seja pela forma ligeiramente diferente de uma folha em particular, seja pela coloração ligeiramente diferente em uma marcação. Foi a partir daí que Peirce teria elaborado sua concepção de continuidade inicial. Insatisfeito com a imprecisão dessa definição, em 1893, Peirce acrescentou uma nota de rodapé, adotando a ideia de "continuidade" para se referir a "intermediação ilimitada, ou seja, de uma série entre cada dois membros de que há outro membro do mesmo". Desse modo, posteriormente, em 1893, no artigo "The Logic of Quantity" (CP 3.526-552), Peirce viria a expor as condições para continuidade, a saber: se um conjunto é contínuo, deve ser infinito, e não pode estar em um-para-uma correspondência com os números naturais.

Nesse particular pode-se dizer que a concepção de continuidade sofrera mudanças no pensamento de Peirce. É possível identificar os diferentes estágios pelos quais tal concepção fora elaborada. Potter (1996), por exemplo, ao analisar o seu desenvolvimento identifica quatro períodos:

1. **pré-cantoriano** (até 1884), que se caracterizaria pelo tratamento indiferenciado entre "continuidade" e "divisibilidade infinita". É desse período a passagem que Peirce afirma que "um sistema contínuo é aquele no qual qualquer quantidade maior que outra é também maior que qualquer quantidade intermediária maior do que outra" (CP 3.256). Tal afirmação, entretanto, seria posteriormente reconhecida pelo próprio Peirce como confusa;

2. **cantoriano** (1884-1890), que corresponderia ao período em que Peirce adotaria a definição dada por Cantor para a continuidade. Ou seja, que a noção de continuidade deveria ser definida independentemente de nossas concepções de tempo e espaço, deixando de lado, assim, as definições antes elaboradas por Aristóteles e Kant. Segundo Peirce, a definição de Cantor por concatenação perfeitas seria a menos insatisfatória de todas (CP 6.164);

3. **kantístico** (1895-1908), período em que Peirce passou a reconhecer que a definição de contínuo de Kant, que reza que todas as partes que têm partes de mesmo tipo é um dos elementos mais importantes (CP 6.168 de 1903). Este período estaria ligado à doutrina dos números transfinitos e à utilização do termo "multitude". Naquela época, Peirce acreditava ter resolvido o problema, já que os pontos não podiam ser vistos como reais constituintes de um contínuo. O fato de que há espaço para qualquer multitude em qualquer ponto de uma linha é o que constitui o contínuo (CP 3.568, CP 4.121).

4. **pós-cantoriano** (1908-1911), que se caracterizaria pelas descobertas de algumas instabilidades do enfoque kantístico, tais como a relação "maior que" aplicada a multiplicidades e a possibilidade, ou não, de conceber a ideia de contínuo considerando-se uma coleção. É nessa fase, mais especificamente, a partir de 1907, em que Peirce passava a se dedicar-se ao estudo da topologia e desenvolver seus grafos existenciais[14], que se encontram as principais ideias que o influenciariam em sua concepção de continuidade (HERRON, 1997)[15].

---

[14] Em 1897, Peirce desenvolveu uma nova logica das relações, denominada grafos existenciais, que recebeu um enfoque diagramático funcional baseado em um método gráfico e topológico (CP 7.102-106). Para Peirce, os grafos existenciais têm por função apresentar a operação do pensamento "in actu" (CP 4.6 de 1905), seriam um filme sobre o movimento do pensamento e, portanto representam os três tipos de raciocínio: abdução, dedução e indução. Os grafos existenciais "colocam diante de nós as figuras moventes do pensamento, o pensamento em sua essência" (CP 4.8 de 1905). Numa carta a W. James, Peirce diz que "os Grafos Existenciais [...] Esta deveria ser a Lógica do Futuro" (NEM III-872-875).

[15] Cabe observar que o contínuo de Peirce é a base para seus grafos existenciais e para sua própria classificação das ciências (ZALAMEA, 2012, p. 20).

Peirce chegaria assim a concluir que um verdadeiro contínuo era diferente de qualquer relação métrica ou ordenada de elementos, de modo que o verdadeiro contínuo não teria elementos reais (CP 3.631 de 1911). Essa conclusão viria assim a combinar a noção aristotélica de potencialidade inexaurível, a noção cantoriana de diversidade transfinita e a noção kantiano-hegeliana de homogeneidade da diversidade na unidade [16].

Cabe observar que a concepção de Cantor do contínuo composto pelos números racionais e irracionais excluía explicitamente os infinitesimais. Com efeito, estudos têm apresentados indícios de que Cantor seria contrário à inclusão dos infinitesimais em sistemas matemáticos (ZALAMEA, 2012). Em *Grundlagen*, ele teria argumentado que aqueles que acreditavam nos infinitesimais para quantidades reais estavam confusos. Além disso, em uma carta endereçada a Weierstrass em 1887, teria formulado o esboço de um argumento para provar que infinitesimais eram entidades autocontraditórias, e, portanto, não poderiam ser consistentemente formulados (BUCKLEY, 2012; ZALAMEA, 2012; PUTNAN, 1982; TANNERY, 1885; DAUBEN, 1999). Ademais, Cantor afirmava veementemente que a relação entre os números reais e os pontos de uma linha geométrica deveria ser assumida e não provada (ZALAMEA, 2012, HERRON, 1997; MOORE, 2009).

A esse respeito é preciso considerar que, embora as considerações de Peirce sobre a continuidade se apoiem profundamente em conhecimentos matemáticos, elas não são puramente matemáticas. Seus trabalhos são recheados de considerações não só matemáticas, mas também filosóficas, metafísicas e lógicas. Tais considerações fariam com que Peirce reconsiderasse a continuidade. Para Peirce, fatos isolados não podiam ser relacionados, e a única forma sob a qual podiam ser entendidos, seria por meio da generalidade, que, para ele, seria a mesma coisa que continuidade (CP 6.173 de 1901)[17]. Para Peirce, o contínuo seria flexível, plástico, homogêneo, movendo-se entre o mundo físico e os ideais abstratos, entre um fenômeno sutil e entre as ramificações dos modelos matemáticos (W 5.301, CP 4.512, CP 7.535)[18].

---

[16] Embora haja diferenças terminológicas entre Cantor e Peirce, estas não serão discutidas neste trabalho. A esse respeito ver CP 3.627-629 ou 4.337.

[17] A própria concepção de contínuo de Peirce ajuda a entender porque várias mentes podem desenvolver em lugares diferentes trabalhos que levam a resultados paralelos, como modos de conexões contínuas entre mentes (CP 6.150, 6.111, 6.148-149). Sua concepção de continuidade seria coerente com um dos aspectos do pensamento do século XIX, a "teologia natural" que proclamava a harmonia entre ciência e religião. Dessa forma temas tais como causação final, design, lei, milagre... componentes do discurso científico da época, eram temas recorrentes na obra de Peirce. O universo apresenta uma estrutura que vai se revelar no decurso da investigação científica, o universo seria um símbolo do objetivo divino, um poema divino e, o livro da natureza estaria disponível para a leitura humana, possibilitando a descoberta da ordem e da racionalidade do universo, permitindo entender "um fragmento do pensamento divino" e conhecer os desígnios do "geômetra divino". Ou seja, a ciência teria como objetivo em última análise revelar os desígnios de Deus e o contínuo de Peirce harmonizaria ciência e religião, no que se denominava "scientific theism" (ANDERSON; HAUSMAN, 2012; RAPOSA, 1989).

[18] Zalamea (2012) investigou a logica da continuidade em Peirce sob duas perspectrivas: o continuum como alternativa à linha real analitica de Cantor e a lógica topológica, os grafos existenciais, que seriam uma alternativa à apresentação algebrica do calculo proposicional de primeira ordem. O autor considera que a força do enfoque de Peirce para o "labirinto do continuum" seria sua interconexão central de generalidade, reflexibilidade e modalidade. A linha real de Cantor (R) serviria como modelo para um dos aspectos fundamentais de um continuum genérico (números naturais, inteiros, racionais), mas segundo Peirce, contínuo de Cantor seria germinal, um embrião da continuidade (NEM 3.95).

Comparado às ideias de Peirce, a concepção de continuidade de Cantor seria insatisfatória, visto que ela envolveria vaga referência a todos os pontos (N 3.58). Para Peirce, seria impossível compreender a ideia de continuidade sem duas dimensões, já que, por exemplo, uma linha oval seria contínua porque seria impossível passar de um lado para outro sem ultrapassar o ponto da curva (CP 6.125):

> *Cantor define uma série contínua como aquela que é concatenada e perfeita. Por série concatenada, ele entende aquela em que, dado qualquer dos dois pontos e uma distância finita, mesmo que pequena, seja possível prosseguir do primeiro ponto em direção ao segundo por meio de uma sucessão de pontos das séries, cada um a uma distância, a partir do precedente, menos a distância dada. Isso é verdadeiro na série de frações racionais organizadas conforme sua magnitude. Por série perfeita, ele entende aquela que contém cada ponto, de forma que não haja distância tão pequena que este ponto não tenha uma infinidade dos pontos das séries dentro daquela distância. Isso é verdade na série de números entre 0 e 1 capazes de serem representados por decimais em que apenas os dígitos 0 e 1 aparecem.* (CP 6.121)

Ou,

> *Ainda acredito haver lugar em uma linha para um grupo de pontos de qualquer multitude, não apenas uma multitude igual àquela dos valores irracionais diferentes, que são, com exceção de um, a menor de todas as multitudes infinitas, ao passo que há claramente uma multitude infinita de grandes multitudes, que é agora reconhecida. Chamo isso de Aristotelicidade das séries, pois Aristóteles parecia ter isso em mente quando apresentou sua definição do contínuo como aquilo cujas partes têm um limite comum.* (NEM 880, fN 2. CP 4.122)

Como também,

> [...] *Cada um é a multitude de possíveis conjuntos formados pelos elementos de um conjunto da multitude seguinte. Parecem ser as mesmas multitudes que Cantor chamou de Alephs. A primeira delas é a multitude de limites diferentes de possíveis séries convergentes de frações racionais e, por isso, de todas as quantidades com as quais a análise matemática pode lidar dentro das limitações da teoria dos limites. (O imaginário não aumenta a multitude.) O que vem na sequência é ainda assunto de discussão, e talvez de interesse inferior. A transição para continuidade é, por outro lado, assunto de extrema importância para a teoria do método científico; além de ser um assunto muito complexo, não pode ser*

> *abordado a partir dos limites de expressão nos impostos aqui.* (CP 3.631).

É notório que o contínuo de Peirce é diferente de linha cantoriana real R. Para Peirce, diferentemente de Cantor, os infinitesimais seriam complemento indispensável para a continuidade. De fato, como observava Peirce, o cerne do problema da concepção de contínuo de Cantor repousava no fato de que os pontos independentes e discretos numa linha tinham pouco a ver com a continuidade de uma linha, visto que os pontos não poderiam ser vistos como reais constituintes de um *continuum*. A possibilidade de haver espaço para qualquer "multitude" em qualquer ponto de uma linha era o que a tornava contínua (CP 3.568). Em outros termos, o contínuo na acepção de Peirce era geral de modo que não poderia ser definido como um conjunto ou uma coleção de diferentes componentes como na definição dada por Cantor (CP 4.640). Isso porque, segundo Peirce, o possível era geral e a continuidade e a generalidade eram dois nomes dados para a mesma falta de distinção dos indivíduos (CP 4.172).

Peirce enfatizava que números não poderiam expressar a continuidade (NEM 3.93), do mesmo modo como os comprimentos não poderiam ser mensuráveis por números, nem por limites das séries de números (NEM 3.127). E ia ainda mais longe. Peirce afirmava que a linha se recusava a ser cortada em pontos por qualquer multiplicidade discreta de facas, por maior que esta fosse (NEM 3.96), e nenhum conjunto de indivíduos poderia ser adequado para a extensão de um conceito em geral (CP 5.526, CP 6.168). Ou:

> *O que é importante destacar aqui é que a única coisa que os números inteiros podem expressar é o lugar relativo dos objetos em uma série simples, discreta e linear; e os números inteiros são aplicáveis a uma variedade de multitudes e conjuntos somente porque cada uma destas multitudes tem um lugar nesta série simples, discreta e linear. É verdade que o Dr. Georg Cantor, o grande fundador e Hauptfördererof patrocinador da doutrina lógico-matemática dos números, começa sua exposição com aquilo que chama de "números cardinais", mas que deveriam ser adequadamente chamados multitudes. Isso porque números cardinais em si não são nada, a não ser termos pertencentes a uma série de termos usados na operação de assegurar a multitude de um conjunto ao contar e, deste modo, são usados para designar os conjuntos para representar suas multitudes. Entretanto, a multitude em si pertence a diferentes conjuntos em diferentes graus, nos quais o número cardinal não tem aplicabilidade alguma.* (CP 4.337)

Por conseguinte, um contínuo não poderia ser constituído por partes separadas, isto é, por um conjunto de pontos individuais e reais. Diferentemente, os componentes de um *continuum* deveriam ser intervalos infinitesimais (momentos) em uma multiplicidade ininterrupta. Assim, um verdadeiro *continuum* deveria consistir em pontos tão próximos uns dos outros que eles se tornariam cimentados uns nos outros (*in points welded together*) de modo a se tornarem indistintos. (NEM 3.87-89). Dessa forma, o uso dos infinitesimais teria legitimidade matemática porque estaria relacionado aos pontos que poderiam ocorrer dentro de um *continuum*. Em outros termos, Peirce usa potencialidade e possibilidade com referência a infinitesimais, cuja ideia evitaria as diferenças entre pontos do *continuum*. Para ele, um *continuum* seria uma coleção de tão grande multitude que em todo o universo de possibilidades não haveria espaço para manterem identidades distintas (RLT, 160).

É importante aqui ressaltar que Cantor considerava os números reais como criados a partir dos racionais. Para ele, os reais eram contínuos (de fato exibiriam a própria essência da continuidade), mas Cantor queria superar o fato de que a continuidade era uma coleção de elementos discretos. Ele considerava que a relação entre os números reais e os pontos sobre uma linha geométrica deveria ser assumida e não comprovada. Quando Cantor afirmara que um *contínuo* de qualquer dimensão poderia ser tratado matematicamente como um *continuum* de uma dimensão, ou seja, como uma linha reta, ele o fez com o argumento de que os membros de um conjunto contínuo de *n* dimensões poderiam ser colocados em uma correspondência um-para-um com os membros de um conjunto contínuo de uma dimensão. Como observa Dauben (1977), a implicação filosófica desse argumento era a de que qualquer contínuo não continha nada mais do que a soma dos seus pontos. Assim, para Cantor, qualquer contínuo deveria ser completamente definido, especificando os membros que o integravam, um conjunto contínuo.

Pode-se dizer que à medida que progredia no estudo da continuidade, Peirce foi levado a rejeitar a visão de Cantor de que o contínuo fosse alguma forma geométrica composta de infinidade de pontos. Enquanto Cantor e Dedekind consideravam os números irracionais como complemento dos racionais, conferindo abrangência sobre os números reais, Peirce viu a relação entre racionais e irracionais de forma diferente. Ele concluiu que havia uma espécie de proximidade nos reais que, na verdade, constituía uma violação da continuidade: "*Vamos considerar o que significa dizer que uma linha é, por exemplo, contínua. A multitude de pontos ou valores limitados de aproximações sobre isso é claramente inumerável. Mas isso não a torna contínua"* (CP 4.175). Ou:

> *Devo usar a palavra multitude para mostrar a característica de um conjunto, que o torna maior que alguns conjuntos e menor que outros, desde que o conjunto seja discreto, ou seja, desde que as unidades que compõem o conjunto sejam ou possam ser nítidas. Mas quando as unidades perdem sua identidade individual, a palavra multitude cessa de ser aplicável. Adotarei a palavra multiplicidade para designar a grandeza de qualquer conjunto discreto ou contínuo.* (CP 4.121)

No final do século XIX, a descoberta do feita por Burali-Forti abalaria o trabalho de Cantor e colocaria fim à fase cantoriana do desenvolvimento do contínuo de Peirce. Em 1902, Bertrand Russell construiu um paradoxo estritamente lógico, mostrando que havia certas antinomias que eram intrínsecas à lógica, e consequentemente à matemática, como forma de raciocínio. Peirce parece ter concordado com Russell de que estes paradoxos seriam lógicos e não matemáticos (CP 3.426-428). Segundo Peirce:

> *Uma pergunta extremamente difícil sobre números inteiros é quais são mais importantes, os números ordinais ou os números cardinais, considerados como expressão das multitudes dos conjuntos [...]. Cantor representa os dois caminhos pelos quais uma unidade pode ser acrescentada a uma série infinita, ou seja, sua incorporação à série ou imediatamente após a série infinita, diferindo apenas no que diz respeito à ordem do desempenho do acréscimo. Mas isto é incorreto. O conceito original de superior contido no conceito geral de lugar ordinal é o de incorporação à série. A contradição aparece ao se falar em uma unidade sendo incorporada a uma série infinita, após todos os componentes da série, bem como ao falar em uma série infinita sendo incorporada a uma série finita. O conceito de uma unidade vir imediatamente após uma série infinita é diferente.* (CP 4.332)

De acordo com Rosa (2003), a partir paradoxo do maior número ordinal, Peirce teria começado a duvidar se sua hipótese de que uma linha daria lugar para conjuntos de pontos de qualquer cardinalidade seria consistente (CP 4.640-642; NEM 3:93), o que lhe valeu dele extrair um princípio, que lhe permitiu resolver a questão da verdadeira natureza de continuidade.

> *Ao mesmo tempo, isto prova que a ideia de valores racionais envolve essencialmete uma relação de sucessão linear e que a uniformidade das partes não é pressuposta. E uma vez que os valores irracionais são nada mais que os limites das séries de valores racionais, eles pressupõem a forma linear da relação. Em razão desta forma de relação de consequência racional os números são de vital importância para o raciocínio. No entanto, a última e mais importante lição que os números sussurram aos nossos ouvidos é aquela da supremacia das formas da relação, para as quais os ornamentos baratos são meramente o exterior do porta-jóias* . (CP 4.679)

Cantor, Du Bois-Reymond, e Peirce tentaram formular o contínuo matemático como um amalgama que forma o todo dos elementos do contínuo, mas Dedekind não parece ter entendido tal vínculo, visto que ele simplesmente caracterizou a continuidade em termos de completude: haveria suficientes números reais tais que em qualquer lugar que se desejasse dividi-los, não haveria lacunas, sem que houvesse qualquer ligação entre eles, pois simplesmente existir nesta coleção, nesta ordem, seria suficiente, para Dedekind denominar de *contínuo*.

> *Cantor, entretanto, mostrou parcialmente aquilo que é totalmente verdadeiro: que toda a teoria da multitude pode ser desenvolvida sem qualquer referência aos números ordinais. Mas no que tange aos ordinais, somos obrigados a abordar o que é a multitude deles. Assim, ao olhar a questão de um determinado ponto de vista, parece que a teoria da*

> *multitude é mais importante do que a dos ordinais e todos os números inteiros de fato expressam multitudes. Mas este é um engano lógico. A ideia de que multitude e posição ordinal em uma série simples, dicreta e linear estão intimamente ligadas é verdadeira. A última envolve a consideração dos fatos constituindo a aplicabilidade dos conceitos definidos de multitude; mas não considera os conceitos em si. Multitude, por outro lado, é o lugar de uma série em uma outra das duas séries simples, discretas e lineares, e é impossível defini-la sem utilizar o conceito de ordinal em si.* (CP 4.337)

Pode-se dizer que, desde o início de suas investigações, os caminhos de Cantor e Peirce foram claramente opostos. Enquanto Cantor e seus seguidores tentavam limitar o contínuo, Peirce tentou mostrar que não se podia restringir o contínuo porque ele era verdadeiramente geral e nunca totalmente determinado. Estaria aí uma das chaves para se entender porque as concepções de Peirce diferem das de Cantor e de Dedekind em sua abordagem aos problemas de continuidade e do infinito[19]. Parte desta diferença parece encontrar explicação nas fontes de Peirce. Segundo Moore (2007), a ideia do contínuo de Peirce teria sofrido influência do trabalho de Boole.

Com efeito, em 1847, George Boole, publicara *The Mathematical Analysis of Logic*, seguido em 1854 por seu trabalho definitivo, *An Investigation of the Laws of Thought.* Estes trabalhos tinham praticamente passado despercebido nos Estados Unidos da América, até que Peirce, em 1867, em um artigo curto, mas importante, apresentado para a American Academy of Arts and Sciences *(Proceedings, Mar. 12, 1867, vol. VII, 250-61; Collected Papers, vol. III*), a ele se referiu, acrescentando uma série de melhorias fundamentais e permanentes no sistema de booleano. Além disso, os trabalhos de natureza mais técnica de Peirce entre 1867-1885 colocam-no como importante lógico formal de seu tempo, tal como podemos constatar no reconhecimento de Ernst Schröder, em seu *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (1890-1905) das contribuições de Peirce para a lógica (MOORE, 2007).

A ideia de continuidade desempenha papel importante na filosofia peirciana, a concepção líder da ciência (CP 1.61). Na sua fase madura, Peirce viria a considerar que a doutrina da continuidade seria tão fundamental a ponto de governar o domínio inteiro da experiência em qualquer um de seus elementos (MS 946). Ao explorar os limites lógicos do possível em termos de infinitamente grande e infinitamente pequeno, não encontrou contradições lógicas ou restrições em qualquer concepção:

> […] *o conceito de continuidade é necessário. Isto envolve a definição de um certo tipo de infinidade; e para tornar tudo bastante claro, é necessário comecar desenvolvendo a teoria lógica da multitude infinita. Após os trabalhos de Cantor, Dedekind e outros, esta teoria ainda*

[19] Vale notar que a continuidade de Cantor é necessariamente um composto de elementos individuais. Se for baseada na existência de conjuntos infinitos, pode-se dizer que sua teoria é semelhante à de Dedekind em alguns aspectos. Peirce e du Bois-Reymond foram críticos desta teoria composicional da continuidade e se esforçaram para desenvolver teorias diferentes, incluindo os infinitesimais em um papel crucial (KEELE, 2008).

> *permanece em uma condição incipiente. A pergunta a seguir, por exemplo, permanece sem resposta: seria logicamente possível, ou não, que dois conjuntos sejam tão multitudinosos que nenhum deles possa ser colocado em uma correspondência de um para um com uma parte ou a totalidade de um outro? A resolução desta questão requer não mera aplicação da lógica, mas um desenvolvimento além do conceito de possibilidade.* (CP 3.526)

Diferentemente da concepção de Cantor, para Peirce, um sistema contínuo seria aquele no qual toda quantidade maior que outra deveria também ser maior que qualquer quantidade intermediária maior que a outra, ou seja, não haveria multitude máxima. Conforme foi mencionado, Peirce foi inspirado por implicações puramente lógicas (tanto do silogismo da quantidade transposta como da lógica das relações). Estava preocupado com o contínuo, acreditando que conceitualmente havia encontrado uma abordagem mais satisfatória do que outras, a de que "o contínuo é um geral", que não poderia ser definido como um conjunto no sentido de Cantor de uma coleção de elementos distintos [20].

> *A questão não é física: é simplesmente se pode haver um conceito consistente de uma continuidade mais perfeita que a chamada "continuidade" da teoria das funções (e do cálculo diferencial), que torna o contínuo o primeiro sistema de pontos abnumerável.* (CP 4.640)

Enfim, a doutrina da continuidade em Peirce seria inseparável da ideia de que a condição fundamental de inteligibilidade, a mediação envolve generalidade e continuidade. Consequentemente um contínuo não poderia ser constituído por partes discretas, ou seja, por uma coleção de pontos individuais e atuais, tal como considerava Cantor. Ao invés disso, os componentes de um contínuo deveriam ser intervalos infinitesimais (momentos) em uma inquebrável multiplicidade de pontos ligados entre si. Peirce servia-se da potencialidade e possibilidade com referência aos infinitesimais[21]. Não só a ideia de

[20] Há ainda outra hipótese para explicar as diferenças entre Peirce e Cantor, elas poderiam estar relacionadas à origem da tendencia de se separar a lógica algébrica em duas correntes, a primeira "a velha escola" que inclui Boole, De Morgan, Jevons, Schröder Peirce e a segunda "a escola italiana" da logica matemática que inclui Dedekind, Cantor, Peano e Frege. Inegavelmente, a segunda corrente, apresentou maior sucesso principalmente até o inicio do século XX. A corrente ligada a Boole, Schröder e Peirce foi eclipsada por aquela dos matemáticos reconhecidos (Frege, Hilbert, Peano e Cantor) (SHIELDS, 1987; PUTNAN, 1982; DIPPERT, 1997; GRATTAN-GUINNESS, 1987). No entanto Schröder, Peirce e seus seguidores estariam no comando de um poderoso sistema de lógica comparável, se não igual à lógica de Frege-Russell-Peano, em alguns aspectos da lógica dos relativos, até mais avançados. Sabe-se que Russell, Whitehead, Peano e mais enfaticamente Schröder reconheceram a influencia de Peirce. Documentos mostram que Peirce acompanhou estas disputas e foi instado por Moore, seu editor e Ladd-Franklin, entre outros a se posicionar e defender suas teorias (MOORE, 2007. DAUBEN, 1977; 1995; EISELE (ed), 1985; PUTNAN, 1982).

[21] Até a década de 1960, acreditava-se a discussão entre aqueles que defendiam os infinitesimais e os que defendiam a teoria dos limites, estivesse resolvida e que os teóricos do limite haviam vencido. No entanto, na década de 1960, Abraham Robinson (1918 - 1974) apresentou um cálculo matemático coerente e poderoso que incorporou infinitesimais transfinitos e os números reais em um único sistema, que é o da análise *non-strandard*. Alguns comentadores de obra de Peirce acreditam na hipótese de que ele confiava no sucesso de sua solução

infinitesimais evitava as consequências de haver lacunas entre os pontos, mas oferecia também uma descrição matemática da continuidade.

Considerações finais

Embora tenha produzido resultados paralelos em alguns aspectos às contribuições de Cantor e Dedekind, o trabalho de Peirce teve, na origem, inspiração e características matemáticas diferentes. A esse respeito é preciso considerar que, embora as considerações de Peirce sobre a continuidade se apoiem profundamente em conhecimentos matemáticos, elas não são puramente matemáticas. Seus trabalhos trazem não apenas considerações matemáticas, mas também filosóficas, metafísicas e lógicas, além de sofrerem a influência de seu trabalho como cientista. Pode-se assim apontar para os seguintes pontos que parecem distinguir as duas ideias:

Em primeiro lugar, Dedekind e Cantor acreditavam que o contínuo poderia ser composto por elementos atômicos e que os números reais formavam um contínuo sem a necessidade de adição de qualquer outro elemento, matemático ou não. Para Peirce um conjunto contínuo, deveria ser infinito, e não poderia estar numa correspondência de um-com os números naturais. Peirce chegaria, assim, a concluir que um verdadeiro contínuo era diferente de qualquer relação métrica ou ordenada de elementos, de modo que o verdadeiro contínuo não teria elementos reais. Para Peirce, fatos isolados não podiam ser relacionados, e a única forma sob a qual podiam ser entendidos, seria por meio da generalidade, que, para ele, seria a mesma coisa que continuidade.

Em segundo lugar, a concepção de Cantor do contínuo composto pelos números racionais e irracionais excluía explicitamente os infinitesimais, ao passo que Du Bois Reymond e Peirce parecem aceitá-los. É notório que o contínuo de Peirce é diferente de linha cantoriana real R. Para Peirce, diferentemente de Cantor, os infinitesimais seriam complemento indispensável para a continuidade. De fato, como observava Peirce, o cerne do problema da concepção de contínuo de Cantor repousava no fato de que os pontos independentes e discretos numa linha tinham pouco a ver com a continuidade de uma linha, visto que os pontos não poderiam ser vistos como reais constituintes de um *continuum*. A possibilidade de haver espaço para qualquer "multitude" em qualquer ponto de uma linha era o que a tornava contínua.

Em outros termos, o contínuo na acepção de Peirce era geral de modo que não poderia ser definido como um conjunto ou uma coleção de diferentes componentes como na definição dada por Cantor, porque, segundo Peirce, o possível era geral e a continuidade e a generalidade eram dois nomes dados para a mesma falta de distinção dos indivíduos. Por conseguinte, um contínuo não poderia ser constituído por partes separadas, isto é, por um conjunto de pontos individuais e reais. Diferentemente, os componentes de um *continuum* deveriam ser intervalos infinitesimais (momentos) em uma multiplicidade ininterrupta. Dessa forma, o uso dos infinitesimais teria legitimidade matemática porque estaria relacionado aos pontos que poderiam ocorrer dentro de um *continuum*. Ou seja, Peirce usa

(ligada aos infinitesimais) no longo prazo, solução que só foi devidamente reconhecida a partir dos desenvolvimentos da análise *non-standard* (PUTNAN, 1982; DIPPERT, 1997; GRATTAN-GUINNESS, 1987).

potencialidade e possibilidade com referência a infinitesimais, cuja ideia evitaria as diferenças entre pontos do *continuum*.

Pode-se dizer que Cantor foi motivado a pesquisar o *continuum* de números reais a partir de seu estudo do teorema da representação de séries trigonométricas. Da mesma forma, Dedekind, inspirado pela análise, caracterizou o contínuo e sua introdução no "corte de Dedekind" para definir os números reais. Na tentativa de ensinar os elementos básicos do cálculo diferencial, particularmente teoremas que envolviam limites, Dedekind percebeu que a intuição geométrica, apesar de ser um guia, não era rigorosamente satisfatória, assim se voltou para um estudo puramente aritmético da continuidade e dos números irracionais.

Finalmente, pode-se dizer que enquanto Cantor e seus seguidores tentavam limitar o contínuo, Peirce tentou mostrar que não se podia restringir o contínuo porque ele era verdadeiramente geral e nunca totalmente determinado.

Para Peirce, a continuidade não era apenas importante, mas era "de primordial importância", influenciando todos os domínios da vida, da psicologia à história, da filosofia à biologia. Ele definiu a doutrina da continuidade, ou sinequismo como a tendência do pensamento filosófico, que insiste na ideia de continuidade como de suma importância na filosofia. A continuidade era necessária não só para explicar o espaço, tempo e movimento, mas também a evolução, o desenvolvimento psicológico, a própria ciência, enfim seria um caminho para a verdade filosófica, mas também para a verdade científica em todas as áreas.

Bibliografia

ANDERSON, D.; HAUSMAN, C. *Conversations on Peirce: Reals and Ideals.* New York: Fordham University Press, 2012.

BACHA, M.L. *A indução de Aristóteles a Peirce*, São Paulo: Legmar, 2002.

BELNA, J.P. *Cantor*. São Paulo: Estação Liberdade, 2011.

BOYER, C. B. *História da matemática*. São Paulo: Edgard Bluchwr, Ed, Universidade de São Paulo, 1974.

BROMBERG, C.; SAITO, F. A História da Matemática e a História da Ciência, in: BELTRAM, M.H; SAITO, F.; TRINDADE, L. *História de ciência, tópicos atuais*, São Paulo, LF Editorial, 2010.

CANTOR, G. Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers, 1955 - books.google.com, disponível em http://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=flb_nnYJJYkC&oi=fnd&pg=PA2&dq=Georg+cantor&ots=Ru-fiQnb9B&sig=u_NB9GF0_qMW2sGhL5x38YBKNVk, acessado em julho de 2012.

CANTOR, G. *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*. New York: Dover, 1955.

CANTOR, G. De la puissance des ensembles parfaits de points, Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur, *Acta Mathematica*, Volume 4, Number 1 (1884), 381-392, DOI: 10.1007/BF02418423, disponível em http://www.springerlink.com/content/86w014504048k3x3/, acessado em outubro de 2012.

CANTOR, G. Extension d' un théoreme de la théorie des séries trigonométriques. *Acta Mathematica*, 2: 336-348, 1883, disponível em http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF02612168#page-1, acessado em maio de 2013.

CANTOR, G. Fondements d'une théorie générale des ensembles. *Acta Mathematica*, Volume 2, Number 1 (1883), 381-408, DOI: 10.1007/BF02612170, disponível em http://www.springerlink.com/content/166qw65537080784/, acessado em outubro de 2012.

CANTOR, G. Sur les ensembles infinis et linéaires de points disponível em http://www.springerlink.com/content/q23431q0655w65r3/, *Acta Mathematica*, Volume 2, Number 1 (1883), 349-380, DOI: 10.1007/BF02612169, acessado em outubro de 2012.

CANTOR, G. Une Contribution a la Théorie des Ensembles Mémoire. *Acta Mathematica*. Volume 2, Number 1 (1883), 311-328, DOI: 10.1007/BF02612166, disponível em http://www.springerlink.com/content/8x4371484v445721/, acessado em outubro de 2012.

DAUBEN, J. W. C. S. Peirce's Philosophy of Infinite Sets. *Mathematics Magazine*, Vol. 50, No. 3 (May, 1977), pp. 123-135. Published by: Mathematical Association of America. http://www.jstor.org/stable/2689498 .Accessed: 28/03/2012 16:22

DAUBEN, J. W. Georg Cantor and Pope Leo XIII: Mathematics, Theology, and the Infinite. *Journal of the History of Ideas,* Vol. 38, No. 1 (Jan. - Mar., 1977), pp. 85-108 Published by: University of Pennsylvania PressStable URL: http://www.jstor.org/stable/2708842 .Accessed: 05/07/2012 11:46.

DAUBEN, J.W The trigonometric background to Georg Cantor's theory of sets, *Archive for History of Exact Sciences*, Volume 7, Number 3 (1971), 181-216, DOI: 10.1007/BF00357216, 1971.

DAUBEN, J.W. Peirce and History of Science. In: Ketner, Kenneth L. (Ed.). *Peirce and Contemporary Thought.* New York: Fordham University Press. S. 146 – 195, 1995.

DAUBEN, J.W. Charles S. Peirce, evolutionary pragmatism and the history of science, Centaurus, *Semiotica* 179–1/4 (2010), 23–31 0037–1998/10/0179–0023, DOI 10.1515/semi. 2010.016 *6* Walter de Gruyter 1996 - interscience.wiley.com.

DAUBEN, J.W. Georg Cantor: His mathematics and philosophy of the infinite, books.google.com, 1990.

DIPPERT, R. Peirce´s Philosophical Conception of Sets, in HOUSER, N; ROBERTS, D; EVRA, J.V (ED.); *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*, Bloomington, Indiana: Indiana University Press, 1997.

EISELE, C. Charles Sanders Peirce. *The Dictionary of Scientific Biography*. New York: Charles Scribner's Sons, 1970.

EISELE, C. *Studies in the Scientific and Mathematical Philosophy of Charles S. Peirce*. Edited by Richard M. Martin. Amsterdam: Mouton Publishers, 1985.

EVES, H., *Introdução à História Da Matemática*, Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

GRATTAN-GUINNESS, I. Peirce between Logic and Mathematics, in HOUSER, N; ROBERTS, D; EVRA, J.V (ED.); *Studies in the Logic of Charles Sanders Pe*irce, Bloomington, Indiana: Indiana University Press, 1997.

HERRON, T. C. S. PEIRCE’S Theory of Infinitesimal, *Transactions of the Charles Sanders Peirce Society*, Summer, vol. XXXIII, n.3. pp. 591-648, 1997.

HOUSER, N; ROBERTS, D; EVRA, J.V (ED.); *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*, Bloomington, Indiana: Indiana University Press, 1997.

JEANRENAUD, M. L. R. A.; MARTINS, D. F.N.; A Questão Do Infinito Em Hilbert, In: *Anais*... 13º Seminário Nacional De História Da Ciência E Da Tecnologia, FLCH/USP, SP, 2012.
KEELE, L. *Theories of Continuity and Infinitesimals: Four Philosophers of the Nineteenth Century*, Submitted to the faculty of the University Graduate School, in partial fulfillment of the requirements for the degree, Doctor of Philosophy, in the Department of Philosophy, Indiana University, May 2008.
MARTINS, R.A. Ciência versus historiografia, in ALFONSO-GOLDFARB; A.M; BETRAN, M.H.R, (orgs). *Escrevendo a História da Ciência: Tendências, Propostas e Discussões Historiográficas*. São Paulo; EDUC Livraria Editora da Física, 2004.
MIZAK, C. (ed.). Charles Sanders Peirce (1839-1914). *The Cambridge Companion to Peirce.* Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
MOORE, M. *Charles S. Peirce Society*. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*43. 3 (Summer 2007): 425-469, 2007.
MOORE, M.E. Peirce on Perfect Sets, Revised. *Transactions of the Charles Sanders Peirce Society*, vol.XLV, n.4, pp. 649-667, 2009.
NASCIMENTO JR, W. G., *O infinito contado por Deus: uma interpretação Dedekindiana do conceito de número ordinal transfinito de Cantor*, tese (doutorado em Filosofia), Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-RIO, 2006.
PEIRCE, C. S. *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. (CP) Ed. by Arthur Burks. Vols 7-8. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1958.
PEIRCE, C. S. *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. (CP) Ed. by Charles Hartshorne and Paul Weiss, Vols.1-6, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1931-35.
PEIRCE, C. S. *The Essential Peirce* (EP2) Ed. by The Peirce Edition Project, Bloomington: Indiana University Press. vol.2. 1998.
PEIRCE, C. S. *The Essential Peirce*. (EP1) Ed. by Nathan Houser and Christian Kloesel, Bloomington: Indiana University Press, 1992.
PEIRCE, C.S. *Historical Perspectives on Peirce's Logic of Science.* Ed. Carolyn Eisele.
Berlin/ New York/ Amsterdam: Mouton, 2 vols, 1985.
PEIRCE, C.S. *The New Elements of Mathematics by Charles S. Peirce* (NEM). Ed Carolyn Eisele. The Hague: Mouton, 4 vols. 1976.
PUTNAN, . Peirce the logician, *Historia Mathematica*, Volume 9, Issue 3, August, p. 290–301, 1982.
QUINE, W. V. Peirce's logic In Kenneth L. Ketner, Joseph M. Ransdell, Carolyn Eisele, Max H. Fisch & Charles S. Hardwick (eds.), *Proceedings of the C. S. Peirce bicentennial international congress* , 23–31. Lubbock: Texas Tech Press, 1995.
RAPOSA, M. *Peirce's philosophy of religion*. 5th ed. Bloomington, Indianapolis: Indiana University Press, 1989.
ROQUE, T. *História da Matemática - Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas*, Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
ROSA, M. *O Conceito de Continuidade Em Charles S. Peirce. Lisboa*: Fundação Calouste Gulbenkian, 2003.

SANTOS, E. E. *O Infinito de Georg Cantor: uma revolução paradigmática no desenvolvimento da matemática*, tese (doutorado em Filosofia), Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual De Campinas, 2008.
SHIELDS, P. Peirce Axiomatization of Arithmetic, in HOUSER, N; ROBERTS, D; EVRA, J.V (ED.); *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*, Bloomington, Indiana: Indiana University Press, 1997.
TANNERY, P. Le Concept Scientifique du Continu Zénon D'élée et Georg Cantor, *Revue Philosophique de la France et de l'Étranger*, T. 20, (JUILLET A DÉCEMBRE 1885), pp. 385-410, 1885, disponível em http://www.jstor.org/stable/41074574.
VILELA, D. A importância relativa do número ordinal e cardinal na primeira versão da teoria dos números transfinitos, *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, n. 14, Jul-Dez 1995, p. 53-63.

Maria de Lourdes Bacha
CCL- Universidade Presbiteriana Mackenzie, UPM
SP -campus Higienopolis, São Paulo - Brasil
Pós-doutorado CESIMA/PUCSP - Brasil
E-mail: mlbacha@gmail.com

Fumikazu Saito
Departamento de Matemática – PUCSP – campus
Marquês de Paranaguá/São Paulo – Brasil
E-mail: fsaito@pucsp.br