

# HISTÓRIA E ENSINO DE MATEMÁTICA: O BÁCULO E A GEOMETRIA

Marisa da Silva Dias  
UNESP – Univ. Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”  
marisadias@fc.unesp.br

Fumikazu Saito  
PUC-SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo  
fsaito@pucsp.br

## Resumo

Este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo em relação às potencialidades pedagógicas que articulam história e ensino da matemática. Uma atividade didática foi elaborada a partir do tratado “Del modo di misurare”, de Cosimo Bartoli, publicado em 1564, cujo problema desencadeador de aprendizagem se configurou no processo de construção e utilização de um instrumento de medida do século XVI, o báculo. As atividades foram desenvolvidas por estudantes do curso de licenciatura em matemática, por professores que lecionam matemática e por mestrandos em Educação Matemática. A análise das atividades permitiu inferir potencialidades pedagógicas em relação à medida e à semelhança de triângulos historicamente contextualizados.

**Palavras-chave:** história da matemática, geometria, semelhança de triângulos, ensino da matemática

## 1. Introdução

Este trabalho tem por objetivo apresentar as potencialidades pedagógicas de uma atividade que procurou construir e utilizar instrumentos de medida do século XVI. A atividade foi elaborada a partir dos estudos do grupo de pesquisa HEEMa (grupo de estudo e pesquisa em História e Epistemologia na Educação Matemática). Há algum tempo educadores matemáticos têm voltado sua atenção para as possíveis relações entre história, epistemologia e ensino-aprendizagem de matemática. Diversas propostas que procuram articular História e Educação Matemática têm sido apresentadas e apreciadas por educadores não só no Brasil, mas também no exterior (D’Ambrosio, 1993, 1996; Miguel & Brito, 1996; Miguel et. al., 2009; Mendes 2006; Mendes, Fossa & Nápoles, 2006; Fossa, 2009; Furinghetti, 2007).

A possibilidade de construção de uma interface entre essas duas áreas de conhecimento remeteu-nos a considerar questões de natureza metodológica que articule pesquisa e prática didática. Como observa Baroni e Nobre (1999), as propostas apresentam-se, em sua maior parte, como relatos e “ensaios”. Isso pode ser constatado, por exemplo, no

relatório publicado pela International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) em 2000 (Fauvel & Van Maanen, 2000).

Assim, partindo do pressuposto de que a História da Matemática pode propiciar a experiência do processo de construção do conceito, promovendo a apropriação do significado dos objetos matemáticos, este trabalho compõe o início de uma proposta didática que busca articular aspectos de uma nova proposta historiográfica da História da Matemática e a Didática da Matemática.

## **2. Potencialidades pedagógicas da História da Matemática**

Concordamos com Miguel (1997) sobre a necessidade de prudência na abordagem da história da matemática no ensino. Um aspecto fundamental para essa análise é considerar que não há uma única história da matemática da qual o educador pode fazer uso. A partir desse pressuposto, sintetizamos os estudos iniciais do grupo HEEMa, em relação às propostas e tendências do uso de história da matemática no ensino, três importantes aspectos que poderiam ser entendidos como favoráveis à integração dessas duas áreas de conhecimento. O primeiro está relacionado à própria área de referência dos educadores matemáticos, em que o papel da história tem ajudado a construir uma visão diferenciada da Matemática que passa a ser vista como atividade intelectual e humanizadora, ao invés de um corpo de conhecimento dado ou um conjunto de técnicas de resolução de problemas matemáticos. O segundo aspecto refere-se à percepção do conhecimento matemático. A inserção de alguns tópicos de história no ensino de matemática tem possibilitado a reorientação da visão do que são os objetos da Matemática, pois o estudo do processo histórico conduz a uma linha interpretativa diferenciada, propiciando a abordagem do mesmo objeto matemático por outra perspectiva e, assim, contribuindo para sua melhor compreensão. O terceiro aspecto a ser considerado é a interdisciplinaridade (Alfonso-Goldfarb, 2003), no qual o processo histórico tem se mostrado eficaz ao abordar o desenvolvimento dos conceitos matemáticos, na medida em que os insere num contexto particular e estabelece relações com outras áreas do conhecimento científico, tecnológico e social (Dias & Saito, 2009).

Esses três aspectos parecem convergir para a idéia de que a história é um potencial recurso para elaboração de propostas didáticas que contemplam a formação do conceito matemático. Isso, entretanto, não quer dizer que devemos ensinar matemática pela

História, nem repetir o percurso histórico na formação de um conceito matemático, mas buscar no processo histórico o movimento do pensamento no contexto da formação deste conceito (Dias & Saito, 2009). Nesse sentido, dentre as diversas iniciativas que procuram aproximar a História da Matemática do ensino de Matemática, o uso de fontes primárias parece ter sido muito promissor (Jahnke, 2000; Furinghetti, 2007).

Seguindo de perto esta tendência, elaboramos uma atividade didática baseada em excertos retirados de uma obra publicada no século XVI. Trata-se de uma das muitas obras escritas entre os séculos XVI e XVII que versavam sobre a construção e o uso de instrumentos para medir e calcular, que designaremos aqui, tal como sugere Bennett (1998, 2003), de “instrumentos matemáticos”.

A intencionalidade de termos escolhido uma fonte que tratasse de instrumentos de medida está relacionada à importância que tais instrumentos passaram a ter naquele período (Daumas, 1989; Hackmann, 1989; Turner, 1998).

Do ponto de vista de Delamain, os instrumentos eram úteis no ensino porque, por meio deles, os princípios matemáticos poderiam ser ensinados ao mesmo tempo em que o seu uso prático era explicado. Isso faria com que o ensino dos princípios fosse realizado de maneira mais eficiente, visto que os usuários de instrumentos não estavam preocupados com demonstrações, mas com as operações práticas. Por outro lado, Oughtred clamava que o verdadeiro caminho da arte matemática não era pelo instrumento, mas apenas pela demonstração. Desse modo, o ensino da matemática não deveria começar pelo instrumento, um artefato que era utilizado apenas com finalidades práticas, visto que o seu usuário não estava preocupado com os princípios matemáticos nele incorporado, mas apenas em saber o que fazer com ele (Turner, 1973).

Esse debate continuaria ao longo do século XVII e chamaria a atenção de outros estudiosos, principalmente, daqueles que estavam preocupados com a educação dos nobres (Turner, 1973). Mas o que se pode concluir do debate entre as idéias de Oughtred e Delamain é a existência de um abismo entre as necessidades dos nobres e os interesses dos estudiosos (que cada vez mais, reforçavam e reafirmavam a importância da matemática no estudo da natureza) e a perspectiva dos “educadores” e os “praticantes de matemáticas” (que envolviam pintores, arquitetos, navegadores, cartógrafos,

construtores de máquinas, entre muitos outros). E foi justamente um tratado escrito por um desses “praticantes de matemática” que nos chamou a atenção para esse trabalho.

### **3. A fonte: *Del modo di misurare***

O *Del modo di misurare* de Cosimo de Bartoli (1564) é, na realidade, uma compilação, como bem sugere o próprio autor no início de sua obra. Dedicado a Cosimo de Medici, essa obra teve grande repercussão naquela época não só pelo seu apelo prático, mas também para o ensino de geometria.

O que é notório nesta obra, assim como em outras do mesmo gênero publicadas na época, é a articulação existente entre a construção e o uso dos instrumentos descritos. Podemos dizer que esses dois aspectos são indissociáveis em *Del modo de misurare*, visto que a obra não era meramente um manual que ensinava a construir e usar instrumentos. Com efeito, analisando a obra, podemos notar que ela estava destinada a um público que tinha conhecimentos não só do conteúdo geométrico, mas também prático de seu ofício. Isso pode ser constatado em certas passagens da obra. Bartoli, por exemplo, não fornece informações sobre os procedimentos que deveriam ser adotados para a construção de escalas no instrumento. As ações para a construção são apenas apresentadas em forma de instrução, solicitando ao leitor que ele apenas “dividissem um segmento em doze partes iguais”, “traçasse três linhas paralelas de tal modo a formar três intervalos proporcionais entre si” e assim por diante. Além disso, o conhecimento geométrico encontra-se implícito na construção do instrumento, isto é, na sua concepção, bem como no seu uso. Ou seja, o conhecimento matemático mobilizado na construção do instrumento está intimamente relacionado ao seu uso, o que aponta para indissociabilidade entre o saber e o fazer.

### **4. Atividade didática**

A atividade didática aqui apresentada foi elaborada com base no primeiro livro de Bartoli que ensina como medir distâncias em diferentes situações, apontando para cada uma delas o modo mais adequado de obter a medida por meio de um instrumento específico. Escolhemos para esse texto o báculo.

A atividade buscou refletir o processo da produção e disseminação do conhecimento. Porém, dependendo da intencionalidade do educador, a atividade pode ser orientada para

diferentes propostas de ensino. A atividade didática a que se refere esse trabalho foi organizada em três etapas interrelacionadas: 1) o tratamento didático do documento, 2) a intencionalidade e plano de ação e 3) o desenvolvimento. Tal atividade fundamenta-se na Atividade Orientadora de Ensino (Moura, 1996; Dias, 2007) e na teoria da Atividade (Leontiev, 1983). Na teoria da Atividade (Leontiev, 1983), a necessidade, o motivo, as ações e o produto de uma atividade humana constituem-se em ligações constituintes do desenvolvimento psíquico. A atividade orientadora de ensino tem como objeto a organização do ensino na perspectiva da teoria da Atividade. A atividade é definida como orientadora porque, no ensino escolar, o professor organiza os elementos essenciais da ação educativa e respeita a dinâmica das interações entre os estudantes, e estes com o professor, a qual nem sempre chega a resultados esperados por ele, uma vez que compartilha com as necessidades e os motivos dos estudantes. A organização do ensino, tem, na sua estrutura, um problema desencadeador de aprendizagem e um plano de ação que são elaborações do professor com a finalidade de aproximar o estudante do objeto de estudo, da sua significação

#### 4.1. O tratamento didático do documento

Com objetivo geral de construir uma abordagem didática capaz de oferecer uma aprendizagem interdisciplinar a partir de documentos históricos que envolvem também conceitos matemáticos, foi escolhido o tratado *Del modo di misurare*, de Cosimo de Bartoli. O primeiro tratamento didático foi de caráter estrutural, com o objetivo de constituir um material que compusesse uma proposta a ser desenvolvida com os estudantes. Para tornar o conteúdo do documento acessível, foi realizada uma tradução para língua portuguesa, do toscano do século XVI, das instruções de construção do instrumento selecionado, o báculo, bem como, das orientações de cálculos a serem realizados para finalizar a medida. Além disso, foram escolhidas da obra duas imagens em que o instrumento aparece (figura 1 e figura 2) a fim de auxiliar a compreensão do leitor.



Figura 1. Báculo (Bartoli 1564, p. 10r)

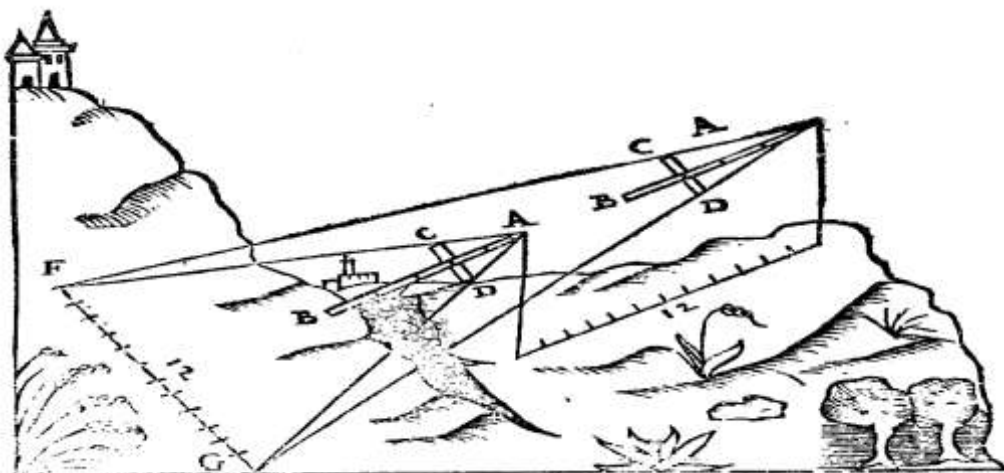


Figura 2. Como usar o báculo (Bartoli, 1564, p. 15r)

Salientamos neste tratamento o cuidado com termos, expressões ou mesmo com os nomes de objetos que poderiam impedir o leitor de compreender minimamente o documento para realização da construção e da medição. Por esse motivo, extrair parte de um documento para atividade didática não é uma tarefa de simples recorte, requer um tratamento que envolve aspectos internos do documento e aspectos didático-pedagógicos.

#### 4.2. A intencionalidade e plano de ação

A intenção didática foi tornar a construção, a medição e a validação do báculo uma situação desencadeadora de aprendizagem, capaz de proporcionar, ao sujeito, elementos históricos integrados no desenvolvimento de conceitos matemáticos, principalmente as formas de produção e de disseminação de conhecimento de uma época, por determinados sujeitos sociais. Além disso, a mobilização de conceitos na atividade pode proporcionar a reflexão do conhecimento sintetizado no próprio instrumento, diferente de outras abordagens didáticas com instrumento que visam somente o uso.

O plano de ação considera as condições objetivas e os sujeitos envolvidos diante da intencionalidade de aprendizagem. Neste trabalho os sujeitos foram aproximadamente quarenta alunos do curso de licenciatura em matemática, quatro professores que lecionam matemática e seis mestrados em Educação Matemática (Dias & Saito, 2010a, 2010b). Em diferentes momentos grupos distintos dos sujeitos, seja em aulas regulares, seja em minicursos, vivenciaram a atividade. Com isso, foi possível discutir as potencialidades pedagógicas que articulam história e ensino da matemática. Parte dos

sujeitos desenvolveu todas as fases da atividade: construção, medição e validação matemática do instrumento, outros desenvolveram somente parte dessas fases.

Em geral a ação dos sujeitos da atividade é iniciada pela leitura do texto, após seu tratamento didático, e análise das imagens, seguindo, então, a construção do instrumento; a coleta de dados necessários com o uso do instrumento; o cálculo da medida da distância proposta e a validação matemática do instrumento, ou seja, a generalização a partir de uma demonstração.

A utilização de régua graduada não foi permitida, pois uma das intencionalidades era aproximar o sujeito das condições de produção dos artesãos do século XVI. No báculo, a unidade de medida, além de não ser usual, não é previamente conhecida, mas é obtida na sua construção e pode ser diferente para cada instrumento construído. Esse fato permite a discussão sobre o ensino e aprendizagem de grandezas e medidas.

### **4.3. Desenvolvimento**

As primeiras manifestações dos sujeitos ocorreram na leitura do documento, o qual revelou as expectativas quanto às instruções de construção, por serem diferentes do tipo “faça você mesmo”, como também quanto aos aspectos subjacentes aos conhecimentos e materiais da época. Com isso, foi possível observar que o interesse histórico partiu dos sujeitos diferentemente de propostas que inserem várias informações históricas antes de introduzir um conceito matemático. A articulação entre os conhecimentos da época para realizar as ações propostas pelo ofício do artesão, por meio do tratado, com os mobilizados pelos professores permitiu alcançar outro nível de compreensão que compõe um conceito matemático. Compreendemos que um conceito não pode ser dado, como uma definição, ele é construído e desenvolvido pelo indivíduo. O papel do ensino é propor situações para esse desenvolvimento, capaz de articular a atividade externa com a interna, cognitiva (Leontiev, 1983). Além disso, salientamos que o conhecimento matemático, e, por sua vez, a formação conceitual, não se restringe à matemática formal.

Observou-se a articulação da interpretação da leitura com os conhecimentos que compõem a concepção do processo de medição. Uma delas refere-se a escala de medida, em virtude da não semelhança às escalas conhecidas nem tampouco quanto a forma de apresentação, nada convencional. O báculo não possui qualquer numeral anotado no

instrumento, somente algumas marcações de divisões e é um instrumento simples de se construir.

A leitura do texto e a observação das figuras não foram suficientes para que a realização da medida fosse imediata. No processo de medição, a posição do observador no espaço, a posição dos olhos em relação aos instrumentos e a posição do instrumento no espaço configuraram três ações não triviais para os sujeitos. Na imagem (figura 2) não há um personagem mostrando o posicionamento dos olhos em relação ao instrumento, nem como segurá-lo ou apoiá-lo. O texto descreve onde o observador deve colocar o olho de uma forma geral, por exemplo, “com o olho no ponto A...”. Inferimos que para o produtor do texto, o artesão, essa informação não era necessária, pois seria um conhecimento tácito dos artesãos da época, bem como de outros interlocutores. A partir do posicionamento inicial o texto descreve o alinhamento necessário como a “mirada”, ou seja, para onde o observador deve olhar e ajustar uma sobreposição de imagens de partes do instrumento com partes do objeto a ser medido. Os sujeitos não estavam acostumados a pensar que seu corpo faz parte de todo o processo de medição, pois os instrumentos atuais, geralmente, devido sua tecnologia, realizam várias funções automaticamente com a mínima interferência do indivíduo.

Dada uma distância para que os sujeitos calculassem a medida, correspondente à distância de F a G da figura 2, eles esticaram um barbante no comprimento, entre as duas posições ocupadas pelo observador no solo, referentes aos locais das visualizações com o instrumento da distância a ser medida. A dificuldade foi na relação entre o comprimento do barbante com o significado das marcas do instrumento. Neste caso inferimos que o hábito de usar certos instrumentos de medida, que compõem o cotidiano dos sujeitos, não foi suficiente para avançar nas relações diferenciadas necessárias para a realização da medida com aquele instrumento. Além disso, a falta de mobilização dos conhecimentos sobre os fundamentos da medida, para a comparação entre os comprimentos obtidos pelo barbante com a unidade de medida dada pelo instrumento, indicou um descompasso entre o saber e o fazer, como também a relação entre a produção do conhecimento e sua apropriação pelo sistema educacional.

A medida com o báculo não é direta e imediata, no sentido de ser semelhante à régua. Ela tem duas fases, a primeira é a coleta da distância entre as duas posições do observador e as correspondentes posições no báculo (transversal CD, da figura 2). A



segunda exige cálculos que envolvem o conhecimento de proporcionalidade e semelhança de triângulos.

A demonstração realizada pelos sujeitos focalizou a triangularização formada pelos pontos A, F e G (figura 2) nas duas posições em que é feita a mirada com báculo, bem como a distância entre essas posições. Considerando os triângulos assim formados como coplanares e isósceles e a semelhança entre o triângulo formado pelos pontos A, F e G com o formado por A, C e D, em cada posição, foi possível validar que o instrumento serve para medir distâncias nas condições apresentadas.

## **5. Considerações Finais**

O trabalho desenvolvido a partir do tratado *Del modo di misurare* de medida permitiu iniciar uma reflexão das potencialidades pedagógicas do uso desse documento para o desenvolvimento de conceitos matemáticos. Diferentemente de instrumentos atuais, cuja tecnologia oculta relações conceituais básicas, necessárias para realização de medidas; a atividade baseada na construção e medição com o báculo forneceu possibilidades, aos sujeitos, de realização de ligações conceituais necessárias à tarefa de mensurar grandezas.

Foi por meio da atividade didática que os sujeitos questionaram aspectos referentes à história, aos conceitos envolvidos, ao processo de ensino e aprendizagem e à produção humana do conhecimento matemático. A confluência entre este conhecimento e outros, de caráter técnico, cultural, etc. possibilitou compreender ligações que fazem parte da produção do conhecimento como atividade humana, historicamente situada nas condições objetivas, coerente com o primeiro aspecto apontado na introdução deste trabalho.

Outro potencial pedagógico caracterizou-se pela forma do uso de fontes primárias geradora de uma reflexão na dialética entre presente e passado cuja contribuição se configura na compreensão da própria produção humana, bem como na produção de cultura. Esses aspectos foram percebidos por meio das discussões sobre o lugar social e o conhecimento do artesão, em determinada estrutura social, e o lugar social e o conhecimento do professor na atualidade. A reflexão e discussão sobre as mudanças no modo de apreender o conhecimento e o avanço tecnológico, resultantes no processo de

complexificação cultural, contribuíram para uma compreensão sobre a formação histórica do sujeito.

Referente ao segundo e ao terceiro aspecto apontado na introdução deste trabalho, o objeto da matemática pôde ser apreendido em um contexto específico, ou seja, proveniente de uma determinada atividade didática. Esta, por sua vez, foi organizada de modo a explicitar a relação entre objetos matemáticos, e extramatemáticos. Por exemplo, tópicos históricos de uma época (como os pontos de vista de Delamain e Oughtred), habilidades de geometrização do espaço (triangularização), as condições materiais de produção do báculo, semelhança de triângulos e proporcionalidade. Com isso, a atividade didática com o instrumento pode ser vista como uma desconstrução do conhecimento humano encarnado no mesmo, para a apropriação no processo educativo.

### **Referências bibliográficas**

- Alfonso-Goldfarb, A. M. (2003). Como se daria a construção de áreas interface do saber? *Kairós*, 6(1), 55-66.
- Baroni, R. L. S. & Nobre, S. (1999). A pesquisa em história da matemática e suas relações com a educação matemática. In M. A. V. Bicudo (Eds.), *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas* (pp. 129-136). São Paulo: Ed. UNESP.
- Bartoli, C. (1564). Cosimo Bartoli Gentil'huomo, et accademico Fiorentino, Del modo di misurare le distantie, le superficie, i corpi, le piante, le province, le prospettive, & tutte le altre cose terrene, che possono occorrere agli homini, Secondo le vere regole d'Euclide, & de gli altri piu lodati scrittori, Venetia, Francesco Franceschi Sanese.
- Bennett, J. (1998). Practical Geometry and Operative Knowledge. *Configurations*, 6, 195-222.
- Bennett, J. (2003). Knowing and doing in the sixteenth century: what were instruments for? *British Journal for the History of Science*, 36(2), 129-150.
- D'Ambrosio, U. (1993). Etnomatemática e seu lugar na história e na pedagogia da Matemática, In R. Gama (Ed.), *Ciência e Técnica* (pp. 105-116). São Paulo: T. A. Queiroz.
- D'Ambrosio, U. (1996). *Educação Matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 14ª edição.
- Daumas, M. (1989) Scientific Instruments of the Seventeenth and Eighteenth Centuries. London: Portman Books.
- Dias, M. S. & Saito, F. (2009) Interface entre história da matemática e ensino: uma aproximação entre historiografia e perspectiva lógico-histórica. In *Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, (p. G05). Brasília: SBEM.
- Dias, M. S. & Saito, F. (2010a). O ensino da matemática por meio de instrumentos do século XVI. In: *Anais do X Encontro Paulista de Educação Matemática*, (Vol. 1. pp. 1-4). São Carlos: SBEM.
- Dias, M. S. & Saito, F. (2010b). A resolução de situações-problema a partir da construção e uso de instrumentos de medida segundo o tratado *Del modo di misurare* (1564) de Cosimo Bartoli. In: Proc. PBL2010 International Conference Problem-Based Learning and

- Active Learning Methodologies (pp. 1-13). São Paulo: Pan American Network of Problem Based Learning/USP.
- Fauvel, J. & Van Maanen, J. (2000) History in Mathematics Education. In *ICMI Study*, Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.
- Fossa, J. A. (2009). *Matemática e medida: três momentos históricos*. São Paulo: Ed. Livraria da Física/SBHMat.
- Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 131-143.
- Hackmann, W. D. (1989). Scientific Instruments: Models of Brass and Aids to Discovery. In D. Gooding, T. Pinch & S. Schaffer (Eds.), *The Uses of Experiment: Studies in the Natural Sciences*, (pp. 31-65.). Cambridge/Nova Iorque/Sidney: Cambridge University Press.
- Jahnke, H. N. (2000). The Use of Original Sources in the Mathematics Classroom. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education - ICMI Study*, (pp. 291-328). Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.
- Mendes, I. A. (2006). *Matemática e investigação na sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem*. Natal: Flecha do Tempo.
- Mendes, I. A., Fossa, J. A. & Nápoles, J. E. (2006). *A história como um agente de cognição na educação matemática*. Porto Alegre: Sulinas.
- Miguel, A. (1997). As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. *Zetetiké*, 5(8), 73-105.
- Miguel, A & Brito, A. J. (1996). A História da Matemática na Formação do Professor de Matemática. *Caderno Cedes*, 40, 47-61.
- Miguel, A. et. al. (2009). *História da matemática em atividades didáticas*. São Paulo: Livraria da Física, 2ª edição.
- Turner, A. J. (1973). Mathematical Instruments and the Education of Gentlemen. *Annals of Science*, 30, 51-65.
- Turner, G. L'E (1998). *Scientific Instruments, 1500-1900: an Introduction*. Berkeley/Los Angeles/London: University of California Press.